فهرس الوحدة

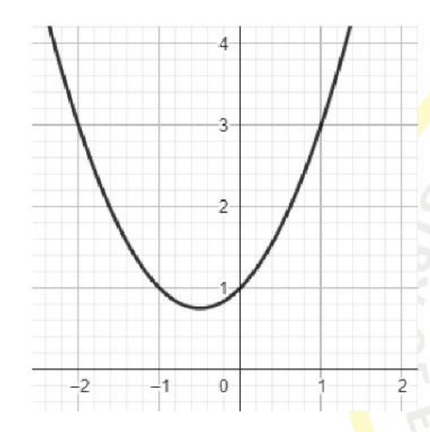
الوحدة الأولى : الجبر والعلاقات والدوال

الدرس الأول: حل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد

تمهيد الدرس: سبق أن درست حل معادلة الدرجة الثانية جبريًا بطريقتين : بالتحليل أو باستخدام القانون العام والآن سوف ندرس حل معادلة الدرجة الثانية بيانيًا

مثال محلول (١): أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : س^٢^ + س + ١ = ٠ بيانيًا

الحــــــــــــــل



حيث أن منحنى الدالة لايقطع محور السينات

المعادلة ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية

∴ مجموعة الحل = Ø

تدريب (١): مثل العلاقة : ص = س^٢^ + ٤ بيانًا ، ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة : س^٢^ + ٤ = ٠

مثال محلول (٢): أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : س^٢^ + ١ = ٠ جبريًا

الحــــــــــــــل

المعادلة : س^٢^ + ١ = ٠ ⟸ س^٢^ = −١

ليس لها حلول فى مجموعة الأعداد الحقيقية ∴ مجموعة الحل = Ø

تدريب (٢): أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : س^٢^ + ٤ = ٠ جبريًا

مثال محلول (٣): أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : س^٢^ − ٤ س + ٥ = ٠ باستخدام القانون العام

الحــــــــــــــل

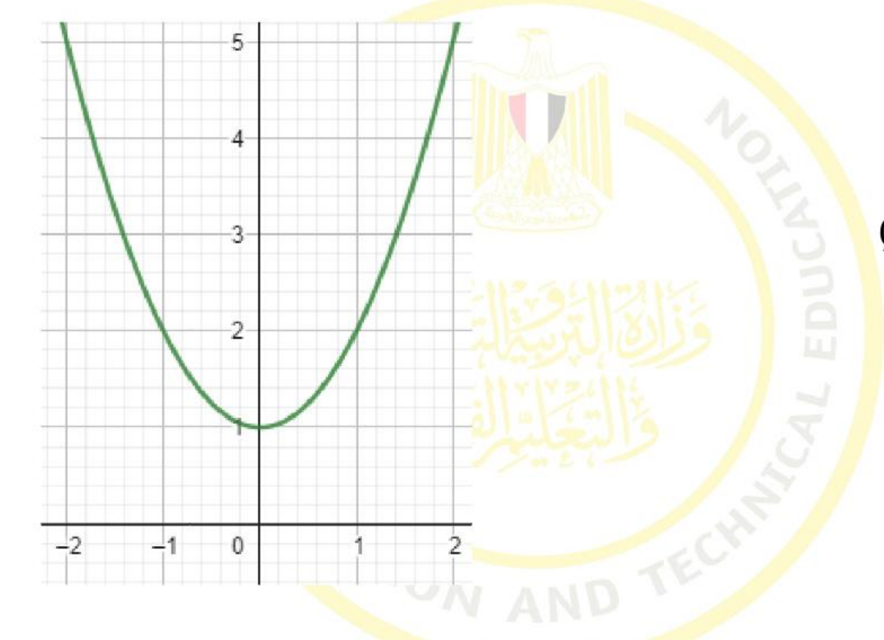
أ = ١ ، ب = −٤ ، جـ = ٥

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ} = \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ - ٤ \times ١ \times ٥}}{٢} = \frac{٤ \pm \sqrt{-٤}}{٢}$$

المعادلة ليس لها حلول فى مجموعة الأعداد الحقيقية ∴ مجموعة الحل = Ø

تدريب (٣): أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : $٢س^٢ + ٣س + ٤ = ٠$ باستخدام القانون العام

حل تدريب (١):



مجموعة الحل = Ø

حل تدريب (٢):

$س^٢ + ٤ = ٠$ ⟸ $س^٢ = -٤$

مجموعة الحل = Ø

حل تدريب (٢):

المعادلة ليس لها حلول فى مجموعة الأعداد الحقيقية ∴ مجموعة الحل = Ø

تمارين على الدرس الأول

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجموعة حل المعادلة : س^{٢} = س في ح هي ....

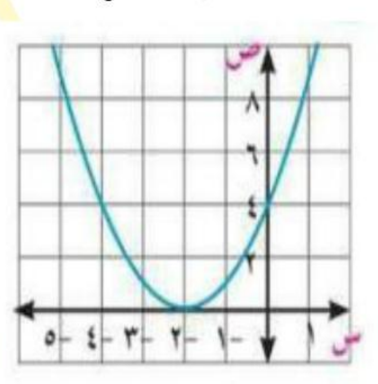
(أ) { ٠ }　　(ب) { ١ ، −١ }　　(جـ) { ١ }　　(د) { ٠ ، ١ }

(٢) مجموعة حل المعادلة : س^{٢} + ٣ = ٠ في ح هي ....

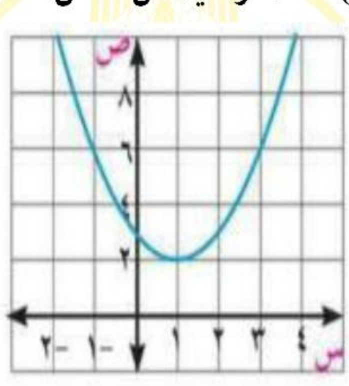
(أ) { −٣ }　　(ب) { − $\sqrt{٣}$ }　　(جـ) { $\sqrt{٣}$ }　　(د) $\emptyset$

(٣) يبين كل شكل من الأشكال الآتية الرسم البياني لدالة من الدرجة الثانية :

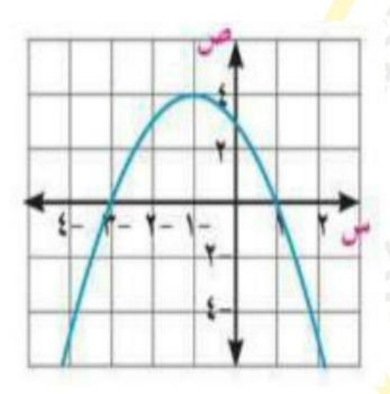
أوجد مجموعة الحل للمعادلة : د(س) = صفر في كل شكل.



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

(٤) أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(أ) س^{٢} = ٣س + ٤٠　　(ب) ٢س^{٢} = ٣ − ٥س

(٥) حل المعادلات الآتية باستخدام القانون العام مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد :

(أ) ٣س^{٢} − ٦٥ = ٠　　(ب) س^{٢} − ٦س + ٧ = ٠

إجابات تمارين على الدرس الأول

(١) { ٠ ، ١ }

(٢) $\emptyset$

(٣) شكل (١) { −٢ }   شكل (٢) $\emptyset$ شكل (٣) { −٣ ، ١ }

(٤) (أ) { ٨ ، −٥ }   (ب) { $\frac{١}{٢}$ ، −٣ }

(٥) (أ) { ٤,٧ ، −٤,٧ }   (ب) { ٤,٤ ، ١,٦ }

الدرس الثانى: مقدمة عن الأعداد المركبة

العدد التخيلى (ت) : هو العدد الذى مربعه = -1

ملخص الدرس : $ت^{2} = -1$ ، $ت^{3} = -ت$ ، $ت^{4} = 1$

وبوجه عام : $ت^{4ن} = 1$ ، $ت^{4ن+1} = ت$ ، $ت^{4ن+2} = -1$ ، $ت^{4ن+3} = -ت$ حيث : ن ∈ ص

مثال محلول (١) :

اختصر الى ابسط صورة : $ت^{6}$ ، $ت^{12}$ ، $ت^{17}$ ، $ت^{4ن-1}$

الحـــــــــل

$ت^{6} = ت^{4} \times ت^{2} = -1$ ، $ت^{12} = ت^{4} \times ت^{4} \times ت^{4} = 1$

$ت^{17} = ت^{16} \times ت = ت$ ، $ت^{4ن-1} = ت^{-1} = ت^{3} = -ت$

تدريب (١):

أوجد كلا مما يأتي في أبسط صورة : $ت^{24}$ ، $ت^{39}$ ، $ت^{-51}$ ، $ت^{4ن+29}$ ، $ت^{4ن+42}$

مثال محلول (٢): أوجد مجموعة حل المعادلة في مجموعة الأعداد المركبة : $س^{2} + 1 = 0$

الحـــــــــل

$س^{2} + 1 = 0$ ⟸ $س^{2} = -1$

$س^{2} = ت^{2}$ ⟸ س = ت أو $-ت$ ⟸ مجموعة الحل = { $-ت$ ، ت }

مثال محلول (٣): حل المعادلة الآتية في مجموعة الأعداد المركبة : $3 س^{2} + 12 = 0$

الحـــــــــل

$3 س^{2} + 12 = 0$ ⟸ $3 س^{2} = -12$

س^{٢} = −٤ ⟸ س = ± $\sqrt{٤ ت^{٢}}$ ⟸ س = ± ٢ ت

مجموعة الحل = { −٢ت ، ٢ت }

تدريب (٢):

(أ) أوجد مجموعة حل المعادلة في مجموعة الأعداد المركبة : س^{٢} + ٩ = ٠

(ب) أوجد مجموعة حل المعادلة في مجموعة الأعداد المركبة : س^{٢} + ٧ = ٠

العدد المركب: العدد المركب هو العدد الذى يمكن كتابته على الصورة : ع = س + ص ت

حيث : س ، ص ∈ ح ، ت^{٢} = −١

يسمى (س) بالجزء الحقيقى للعدد المركب ، يسمى (ص) بالجزء التخيلى للعدد المركب.

تساوى عددان مركبان :

س + ص ت = أ + ب ت ⟺ س = أ ، ص = ب

مثال محلول (٤) :

إذا كان : س + ت ص = ٢ ت فإن : س = ... ، ص = ...

الحـــــــــل

س = صفر ، ص = ٢

مثال محلول (٥): أكمل :

إذا كان : (٤ س + ١) + ٤ ص ت = ٥ − ١٢ ت فإن : س = ... ، ص = ...

الحـــــــــل

٤ س + ١ = ٥ ⟸ ٤ س = ٤ ⟸ س = ١

٤ ص = −١٢ ⟸ ص = −٣

تدريب (٣):

(أ) أوجد قيمتى أ ، ب اللتان تحققان المعادلة : (أ + ٣) − (ب − ١) ت = ٧ − ٩ ت ، ت^{٢} = −١

(ب) أوجد قيمتى أ ، ب اللتان تحققان المعادلة : ١٢ + ٣ أ ت = ٤ ب − ٢٧ ت ، ت^{٢} = −١

(جـ) أوجد قيمتى س ، ص اللتين تحققان المعادلة : (س −٣ ص) + (٢س + ص) ت = ٦ + ٥ ت

العمليات على الأعداد المركبة :

ملخص الدرس: يمكن استخدام خواص الابدال والتجميع والتوزيع عند جمع أو ضرب الأعداد المركبة كما توضح ذلك الأمثلة التالية.

مثال محلول (٦): اختصر الى ابسط صورة :

(١) (٤ + ٣ ت) + (٢ − ت)

(٢) (٣ + ٥ ت) − (٢ − ٣ ت)

(٣) (٤ + ٢ ت) (٤ − ٥ ت)

الحـــــــــل

(١) (٤ + ٣ ت) + (٢ − ت) = ٤ + ٣ ت + ٢ − ت = ٦ + ٢ ت

(٢) (٣ + ٥ ت) − (٢ − ٣ ت) = ٣ + ٥ ت − ٢ + ٣ ت = ١ + ٨ ت

(٣) (٤ + ٢ ت) (٤ − ٥ ت) = ١٦ − ٢٠ ت + ٨ ت − ١٠ ت^{٢}

= ١٦ − ٢٠ ت + ٨ ت + ١٠ = ٢٦ − ١٢ ت

تدريب (٤):

(١) ضع العدد المركب الآتى فى أبسط صورة : (٢٦ − ٤ ت) − (٩ − ٢٠ ت) ، ت^{٢} = −١

(٢) المقدار (−٤ ت) (−٦ ت) فى أبسط صورة = ...

(٣) (٤ − ٣ت) (٤ + ٣ ت) = ...

(٤) (٧ − ٥ت) (٢ + ٦ ت) = ...

العددان المترافقان :

ملخص الدرس: العددان المركبان $س + ص ت$ ، $س - ص ت$ يسميان بالعددان المترافقان

حيث : $(س + ص ت) (س - ص ت) = س^2 + ص^2 \in ع$

$(س + ص ت) + (س - ص ت) = ٢س \in ع$

مثال محلول (٧): ضع في أبسط صورة : $(١ + ٢ ت) (١ - ٢ ت)$

$(١ + ٢ ت) (١ - ٢ ت) = ١ + ٤ = ٥$

تدريب (٥): ضع في أبسط صورة : $(٤ - ٣ت) (٤ + ٣ ت)$

مثال محلول (٨): اختصر الى ابسط صورة : $ع = \frac{٣ + ٢ ت}{٤ + ٣ ت}$

الحـــــــــــل

$$ع = \frac{٣ + ٢ ت}{٤ + ٣ ت} \times \frac{٤ - ٣ ت}{٤ - ٣ ت} = \frac{١٢ - ٩ ت + ٨ ت - ٦ ت^2}{١٦ + ٩} = \frac{١٢ - ٩ ت + ٨ ت + ٦}{٢٥}$$

$$= \frac{١٨ - ت}{٢٥} = \frac{١٨}{٢٥} - \frac{١}{٢٥} ت$$

مثال محلول (٩): إذا كان : $س = \frac{٢٦}{٥ + ت}$ ، $ص = \frac{٤ + ٦ ت}{١ + ت}$ فاثبت أن : س ، ص مترافقان ثم

اوجد قيمة : $س^2 + س ص + ص^2$ ، $س^2 ص + س ص^2$

الحـــــــــــل

$$س = \frac{٢٦}{٥ + ت} \times \frac{٥ - ت}{٥ - ت} = \frac{٢٦ (٥ - ت)}{٢٦} = ٥ - ت$$

$$ص = \frac{4+6ت}{1+ت} \times \frac{1-ت}{1-ت} = \frac{4-4ت+6ت+6}{2} = \frac{10+2ت}{2} = 5 + ت$$

∴ س ، ص مترافقان

- $س^2 + س ص + ص^2 = س^2 + 2 س ص + ص^2 - س ص$

$= (س + ص)^2 - س ص = 100 - 26 = 74$

- $س^2 ص + س ص^2 = س ص (س + ص) = 26 \times 10 = 260$

تدريب (٦): إذا كان : $س = \frac{1-2ت}{1-3ت}$ ، $ص = \frac{2-ت}{3-ت}$ فاثبت أن : س ، ص مترافقان.

حل تدريب (١): ١ ، ‎−ت ، ت ، ت ، ‎−١

حل تدريب (٢): (أ) { ‎−٣ ت ، ٣ ت } (ب) $\{-\sqrt{7}\,ت ، \sqrt{7}\,ت\}$

حل تدريب (٣): ط

(أ) أ = ٤ ، ب = ١٠

(ب) أ = ‎−٩ ، ب = ٣

(ج) س − ٣ص = ٦ ، ٢ س + ص = ٥

بحل المعادلتين : س = ٣ ، ص = ‎−١

حل تدريب (٤): (١) ١٧ + ١٦ ت ، (٢) ‎−٢٤ ، (٣) ٢٥ ، (٤) ٣٤ + ٣٢ ت

حل تدريب (٥): (٤ − ٣ت) (٤ + ٣ ت) = ١٦ + ٩ = ٢٥

حل تدريب (٦):

$س = \frac{7}{10} + \frac{1}{10}ت$ ، $ص = \frac{7}{10} - \frac{1}{10}ت$

س ، ص مترافقان

تمارين على الدرس الثانى

(١) أبسط صورة للعدد التخيلى : $ت^{٧٣}$ = ...

(٢) أبسط صورة للعدد التخيلى : $ت^{٤٣}$ = ...

(٣) (٢ + ٣ ت) − (١ − ٢ ت) = ...

(٤) (١ + ٢ $ت^{٣}$) (٢ + ٣ $ت^{٥}$ + ٤ $ت^{٦}$) = ...

(٥) إذا كان : س + ت ص = $\frac{٢}{١ + ت}$ فإن : س ص = ...

(٦) إذا كان : س = ٣ + ٢ ت ، ص = $\frac{٤ - ٢ ت}{١ - ت}$ فاوجد : س + ص فى صورة عدد مركب

(٧) أبسط صورة للمقدار $(١ - ت)^{١٠}$ هى ....

(٨) أوجد قيمتى س ، ص اللتان تحققان المعادلة : $\frac{(٢ + ت)(٢ - ت)}{٢ + ٤ ت}$ = س + ص ت

(٩) أوجد مجموعة حل المعادلة : $س^{٢}$ − س + ١ = ٠ فى مجموعة الأعداد المركبة.

(١٠) مستخدمًا القانون العام حل المعادلة : ٥ $س^{٢}$ − ٤ س + ١ = ٠ فى مجموعة الأعداد المركبة.

(١١) ١ + ت + $ت^{٢}$ + $ت^{٣}$ + $ت^{٤}$ = ...

أ) ١ + ت ب) −١ جـ) ١ د) ٤

(١٢) $ت^{٨ن - ٣}$ = ...

أ) ت ب) − ت جـ) -١ د) ١

(١٣) مرافق العدد : ٣ ت − ٤ هو ....

أ) ٣ ت + ٤ ب) − ٣ ت − ٤ جـ) − ٣ ت + ٤ د) ٣ ت − ٤

(١٤) إذا كان : ١٢ + ٣س ت = ٤ن − ٢٧ ت فإن : س + ن = ...

أ) ١٢ ب) − ٩ ج) -٦ د) ٦

(١٥) المعكوس الضربي للعدد : $\frac{١}{١ + ت}$ هو ....

أ) ت + ١ ب) − ت − ١ ج) − ت + ١ د) ت − ١

اجابات تمارين على الدرس الثانى

(١) ت

(٢) − ت

(٣) ١ + ٥ ت

(٤) ٤ + ٧ ت

(٥) −١

(٦) ٦ + ٣ ت

(٧) − ٣٢ ت

(٨) $\frac{١}{٢}$ ، −١

(٩) $\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت ، $\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

(١٠) $\frac{٢}{٥} + \frac{١}{٥}$ ت ، $\frac{٢}{٥} - \frac{١}{٥}$ ت

(١١) ١

(١٢) ت

(١٣) − ٣ ت − ٤

(١٤) −٦

(١٥) ت + ١

الدرس الثالث : تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية

ملخص الدرس: الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانية هى : أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠

حيث : أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية ، أ ≠ ٠

المميز = ب^{٢} − ٤ أ جـ

☜ إذا كان (المميز) ب^{٢} − ٤ أ جـ > ٠ كان الجذران حقيقيان مختلفان.

☜ إذا كان (المميز) ب^{٢} − ٤ أ جـ = ٠ كان الجذران حقيقيان متساويان.

☜ إذا كان (المميز) ب^{٢} − ٤ أ جـ < ٠ كان الجذران مركبان مترافقان (غيرحقيقيان).

مثال محلول (١): بين نوع الجذرين لكل من المعادلات الآتية دون حلها :

١) س^{٢} − ٤ س + ٢ = ٠

٢) س^{٢} − ١٢ س + ٣٦ = ٠

٣) ٤س^{٢} + ٧ س + ٥ = ٠

الحـــل

١) س^{٢} − ٤ س + ٢ = ٠

أ = ١ ، ب = −٤ ، جـ = ٢

المميز = ب^{٢} − ٤ أ جـ = ١٦ − ٨ = ٨ > ٠ ∴ الجذران حقيقيان مختلفان

٢) س^{٢} − ١٢ س + ٣٦ = ٠

أ = ١ ، ب = − ١٢ ، جـ = ٣٦

المميز = ب^{٢} − ٤ أ جـ = ١٤٤ − ١٤٤ = صفر ∴ الجذران حقيقيان متساويان

٣) ٤س^{٢} + ٧ س + ٥ = ٠

أ = ٤ ، ب = ٧ ، جـ = ٥

المميز = ب^{٢} − ٤ أ جـ = ٤٩ − ٨٠ = − ٣١ ∴ الجذران مركبان (غيرحقيقيان).

تدريب (١): بين نوع الجذرين لكل من المعادلات الآتية :

١) س^٢ − ٧ س + ١٠ = ٠

٢) س^٢ + ٥ س + ٣ = ٠

٣) ٤س^٢ − ١٢ س + ٩ = ٠

مثال محلول (٢): أوجد قيمة ك التى تجعل جذرى المعادلة : ٣س^٢ − ٦ س + ك = ٠ متساويان.

الحـــــــــــل

أ = ٣ ، ب = − ٦ ، جـ = ك

ب^٢ − ٤ أ جـ = ٠

٣٦ − ١٢ ك = ٠ ⟸ ١٢ ك = ٣٦ ⟸ ك = ٣

تدريب (٢): أوجد قيمة م التى تجعل جذرى المعادلة : س^٢ + م س + ٩ = ٠ متساويان.

مثال محلول (٣): اثبت أن جذرى المعادلة : ٢ س^٢ − ٣ س + ٢ = ٠ مركبان (غير حقيقيين). ثم استخدم القانون العام لإيجادهما.

الحـــــــــــل

أ = ٢ ، ب = − ٣ ، جـ = ٢

المميز = ب^٢ − ٤ أ جـ = ٩ − ١٦ = −٧ (سالب) ∴ الجذران مركبان (غيرحقيقيين)

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ} = \frac{٣ \pm \sqrt{٩ - ١٦}}{٤} = \frac{٣ \pm \sqrt{-٧}}{٤}$$

الجذران هما : $\frac{٣}{٤} + \frac{\sqrt{٧}}{٤}$ ت ، $\frac{٣}{٤} - \frac{\sqrt{٧}}{٤}$ ت

تدريب (٣):

(أ) اثبت أن جذرى المعادلة : ٧ س^٢ − ١١ س + ٥ = ٠ مركبان (غير حقيقيان). ثم استخدم القانون العام لإيجادهما.

مثال محلول (٤): إذا كان م عددًا نسبيًا فأثبت أن جذرى المعادلة : $٢٥ س^٢ + ٥(م + ٣) س + ٣ م = ٠$ نسبيان.

الحـــــــــــــل

أ = ٢٥ ، ب = ٥(م + ٣) ، جـ = ٣ م

المميز = $ب^٢ - ٤ أ جـ = ٢٥ (م^٢ + ٦م + ٩) - ٤ × ٢٥ × ٣ م$

$= ٢٥ م^٢ + ١٥٠م + ٢٢٥ - ٣٠٠ م$

$= ٢٥ م^٢ - ١٥٠م + ٢٢٥ = ٢٥(م^٢ - ٦ م + ٩) = ٢٥ (م - ٣)^٢$

المميز مربع كامل ∴ الجذران عددان نسبيان

تدريب (٣): إذا كان ل ، م عددان نسبيان ، فأثبت أن جذرى المعادلة : $ل س^٢ + (ل - م) س - م = ٠$ عددان نسبيان.

حل تدريب (١): (١) الجذران مركبان (غير حقيقيان).

(٢) الجذران حقيقيان مختلفان.

(٣) الجذران حقيقيان متساويان.

حل تدريب (٢): م = ± ٦

حل تدريب (٣):

(أ) $\frac{١١}{١٤} + \frac{\sqrt{١٩}}{١٤}$ ت ، $\frac{١١}{١٤} - \frac{\sqrt{١٩}}{١٤}$ ت

حل تدريب (٤):

$ب^٢ - ٤أجـ = (ل - م)^٢ + ٤ ل م$

$= ل^٢ - ٢ ل م + م^٢ + ٤ ل م = ل^٢ + ٢ ل م + م^٢ = (ل + م)^٢$

المميز مربع كامل الجذران عددان نسبيان

تمارين على الدرس الثالث

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) يكون جذرى المعادلة : س٢ – ٤ س + ك = ٠ متساويين إذا كانت : ك = …………

(أ) ١ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

(٢) يكون جذرى المعادلة : س٢ – ٢س + م = ٠ حقيقيين مختلفين إذا كانت …………

(أ) م = ١ (ب) م > ١ (جـ) م < ١ (د) م = ٤

(٣) يكون جذرى المعادلة : ل س٢ – ١٢س + ٩ = ٠ مركبين (غيرحقيقيين) إذا كانت …………

(أ) ل = ٤ (ب) ل > ٤ (جـ) ل < ٤ (د) ل = ١

(٤) حدد نوع جذرى المعادلة : س٢ – ٢س + ٥ = ٠

(٥) حدد نوع جذرى المعادلة : س٢ – ١٠س + ٢٥ = ٠

(٦) إذا كان جذرا المعادلة : أ س٢ + ب = ٠ حقيقيين ومختلفين فإن …………

(أ) أ > صفر ، ب > صفر (ب) أ ب < صفر (جـ) أ ب > صفر (د) أ = صفر

(٧) إذا كان : أ س٢ + ب س + جـ = ٠ وكان : أ جـ < صفر فإن جذرى المعادلة يكونان …………

(أ) حقيقيان متساويان (ب) حقيقيان مختلفان (جـ) مركبان مترافقان (د) نسبيان

(٨) إذا كان جذرى المعادلة : س٢ + ٤س + م = ٠ حقيقيين مختلفين فإن م ∋ …………

(أ)]–∞ ، ٤[(ب)]٤ ، ∞[(جـ)]–∞ ، ٤] (د) [٤ ، ∞[

(٩) جذرا المعادلة : أ س٢ + ب س + جـ = ٠ حقيقيين متساويين إذا كان : ب٢ = …………

(أ) ٢أ جـ (ب) أ جـ (جـ) ٤أ جـ (د) –٤أ جـ

(١٠) أوجد قيم ك التي تجعل للمعادلة : ك س٢ – ٤س + ٤ = ٠ جذرين مركبين (غيرحقيقيين).

اجابات تمارين على الدرس الثالث

(١) ٤

(٢) م > ١

(٣) ل > ٤

(٤) مركبان (غيرحقيقيان)

(٥) حقيقيان متساويان

(٦) أ ب > صفر

(٧) حقيقيان مختلفان

(٨)]− ∞ ، ٤[

(٩) ٤أ جـ

(١٠) ك ∋]١ ، ∞[

الدرس الرابع: العلاقة بين جذري معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها

ملخص الدرس : بفرض أن جذرى المعادلة : أ $س^2$ + ب س + جـ = ٠ هما ل ، م

حيث : أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية ، أ ≠ ٠

☜ مجموع الجذرين = ل + م = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^2}$ = $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$

☜ حاصل ضرب الجذرين = ل م = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^2}$ = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$

نتائج هامة :

(١) إذا كان أحد جذرى المعادلة معكوسًا جمعيًا للجذر الآخر فإن : معامل س = صفر أي (ب = صفر)

(٢) إذا كان أحد جذرى المعادلة معكوسًا ضربيًا للجذر الآخر فإن : أ = جـ

مثال محلول (١):

إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : ٢$س^2$ + ٥س + ٣ = ٠ فإن : ل + م = ... ، ل م = ...

الحـــــــــل

ل + م = $\frac{-٥}{٢}$ ، ل م = $\frac{٣}{٢}$

تدريب (١):

إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : ٣$س^2$ − ٧س + ١٣ = ٠ فإن : ل + م = ... ، ل م = ...

مثال محلول (٢): إذا كان أحد جذرى المعادلة : ٢$س^2$ + (أ − ٥) س + ١٣ = ٠ معكوسًا جمعيًا للجذر الآخر فإن : أ = ...

الحـــــــــل

أ − ٥ = ٠ ⟸ أ = ٥

تدريب (٢):

إذا كان أحد جذرى المعادلة س^٢ + (أ − ٧) س − ٩ = ٠ معكوسًا جمعيًا للجذر الآخر فإن : أ = ...

مثال محلول (٣):

إذا كان أحد جذرى المعادلة : ٥س^٢ + ٢٦ س + أ − ٢ = ٠ معكوسًا ضربيًا للجذر الآخر فإن : أ = ...

الحـــــــــــل

أ − ٢ = ٥ ⟸ أ = ٧

تدريب (٣): إذا كان أحد جذرى المعادلة : س^٢ − ٥ س + ل − ٤ = ٠ معكوسًا ضربيًا للجذر الآخر فإن : ل = ...

مثال محلول (٤):

إذا كان أحد جذرى المعادلة : س^٢ − ٣ م س + (٧ م − ٣) = ٠ يساوى ضعف الجذر الآخر أوجد قيمة م الصحيحة الموجبة.

الحـــــــــــل

نفرض أن جذري المعادلة هما : ل ، ٢ل

مجموع الجذرين = ٣ ل = ٣ م ⟸ م = ل

حاصل ضرب الجذرين = ٢ل^٢ = ٧ م − ٣

٢م^٢ = ٧ م − ٣ ⟸ ٢م^٢ − ٧ م + ٣ = ٠

(٢م − ١) (م − ٣) = ٠ ⟸ م = $\frac{١}{٢}$ مرفوض ، م = ٣

تدريب (٤):

(١) أوجد قيمة ك التى تجعل أحد جذرى المعادلة : س^٢ – ٦س + ك = ٠ يساوى مربع الجذر الآخر.

(٢) إذا كان : س = ٣ أحد جذرى المعادلة : ٣س^٢ – ٢س – هـ = ٠ فإن : هـ = ...

مثال محلول (٥):

إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة : ٣س^٢ + ١٠ س – ل = ٠ يساوى $\frac{-٨}{٣}$ فاوجد قيمة ل

الحـــــــل

$\frac{-ل}{٣} = \frac{-٨}{٣}$ ⟸ ل = ٨

تدريب (٥):

إذا كان مجموع جذرى المعادلة : ٢س^٢ + ب س – ٥ = ٠ يساوى $\frac{-٣}{٢}$ فاوجد قيمة ب

مثال محلول (٦):

إذا كان : (١ + ت) هو أحد جذور المعادلة : س^٢ – ٢س + ل = ٠ حيث ل ∈ ح فاوجد :

(أ) الجذر الآخر (ب) قيمة ل

الحـــــــل

(أ) الجذر الآخر هو (١ – ت) لأن الجذران مترافقان ومجموعهما = ٢

(ب) حاصل ضرب الجذرين = ل

(١ + ت) (١ – ت) = ل ⟸ ل = ٢

تدريب (٦):

إذا كان : (٢ + ت) هو أحد جذور المعادلة : س^٢ – ٤س + م = ٠ حيث م ∈ ح فاوجد :

(أ) الجذر الآخر (ب) قيمة م

حل تدريب (١): $\frac{٧}{٣}$ ، $\frac{١٣}{٣}$

حل تدريب (٢): أ = ٧

حل تدريب (٣): ل = ٥

حل تدريب (٤): (١) ك = ٨ أو − ٢٧ (٢) ٢١

حل تدريب (٥): ب = ٣

حل تدريب (٦): (أ) الجذر الآخر = ٢ − ت (ب) م = ٥

تمارين على الدرس الرابع

أكمل مايأتى :

(١) إذا كان : س = $\sqrt{5}$ أحد جذرى المعادلة : ٢س^{٢} − $\sqrt{5}$ س − م = ٠ فإن : م = ...

(٢) إذا كان أحد جذرى المعادلة : ٢س^{٢} − (٧ − ب) س + ٤ = ٠ معكوسًا جمعيًا للجذر الآخر
فإن : ب = ...

(٣) إذا كان : س = ٣ أحد جذري المعادلة : س^{٢} + أ س − ١٢ = ٠
فإن : أ = ... ، الجذر الآخر = ...

(٤) إذا كانت النسبة بين جذري المعادلة : س^{٢} − ب س + ٤٨ = ٠ تساوى ٣ : ٤ فأوجد قيمة ب

(٥) إذا كان : ل ، ٢ − ل هما جذرا المعادلة : س^{٢} + ك س + ٦ = ٠ فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) −٢ (جـ) −٣ (د) ٥

(٦) أوجد قيمة م التي تجعل أحد جذرى المعادلة : س^{٢} + ٣ س + م = ٠ ضعف الجذر الآخر.

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(٧) إذا كان : (٢ + ت) هي أحد جذرى المعادلة : س^{٢} − ٤ س + جـ = ٠ فإن قيمة جـ = ...

(أ) ١٦ (ب) −١٦ (جـ) −٥ (د) ٥

(٨) إذا كان : ل ، م جذرا المعادلة : $س^{٢} - (٣ - ب) س + ٢ = ٠$ ، وكان : ل + م = ٧

فإن : ب = ...

(أ) ٤ (ب) −١٠ (جـ) −٤ (د) ١٠

(٩) إذا كان أحد جذرى المعادلة : $س^{٢} - ٥ س + هـ = ٠$ يزيد عن الجذر الآخر بمقدار ٣

فإن : هـ = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

(١٠) إذا كان أحد جذرى المعادلة : $٢م س^{٢} + ٧ س + ١ + م^{٢} = ٠$ معكوساً ضربياً للجذر الآخر

فإن : م = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ± ١ (د) ٢

اجابات تمارين على الدرس الرابع

(١) ٥

(٢) ٧

(٣) ١ ، −٤

(٤) ± ١٤

(٥) − ٢

(٦) ٢

(٧) ٥

(٨) − ٤

(٩) ٤

(١٠) ١

تابع الدرس الرابع : تكوين المعادلة التربيعية متى علم جذراها

ملخص الدرس : إذا كان : ل ، م هما جذرى معادلة تربيعية.

فإن : المعادلة تكون علي الصورة : س^{٢} − (مجموع الجذرين) س + حاصل ضرب الجذرين = ٠

أي : س^{٢} − (ل + م) س + ل م = ٠

تذكر أن :
☜ ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} − ٢ل م ☜ (ل − م)^{٢} = (ل + م)^{٢} − ٤ل م

☜ ل^{٢} م^{٢} = (ل م)^{٢} ☜ $\frac{١}{ل} + \frac{١}{م} = \frac{ل + م}{ل م}$

☜ ل^{٣} + م^{٣} = (ل + م) [(ل + م)^{٢} − ٣ ل م]

مثال محلول (١): كون المعادلة التربيعية التي جذراها ٣ + $\sqrt{٢}$ ، ٣ − $\sqrt{٢}$

الحـــــــــل

مجموع الجذرين = ٦

حاصل ضرب الجذرين = (٣ + $\sqrt{٢}$) (٣ − $\sqrt{٢}$) = ٩ − ٢ = ٧

المعادلة هي : س^{٢} − ٦ س + ٧ = ٠

تدريب (١): كون المعادلة التربيعية التي جذراها : ٧ + $\sqrt{٣}$ ، ٧ − $\sqrt{٣}$

مثال محلول (٢):

إذا كان ل ، م جذري المعادلة س^{٢} − ١٠ س + ك = ٠ وكان ل^{٢} + م^{٢} = ٨٠ فأوجد قيمة ك العددية.

الحـــــــــل

ل + م = ١٠ ، ل م = ك

ل^{٢} + م^{٢} = ٨٠ ⟸ (ل + م)^{٢} − ٢ل م = ٨٠

١٠٠ − ٢ك = ٨٠ ⟸ ٢ك = ٢٠ ⟸ ك = ١٠

مثال محلول (٣):

إذا كان ل ، م جذري المعادلة ٢س^{٢} − ١٣س − ١١ = ٠

أوجد المعادلة التي جذراها ل + ٣ ، م + ٣

الحـــــــــــل

ل + م = $\frac{١٣}{٢}$ ، ل م = $\frac{-١١}{٢}$

مجموع الجذرين = ل + م + ٦ = $\frac{١٣}{٢}$ + ٦ = $\frac{٢٥}{٢}$

حاصل ضرب الجذرين = (ل + ٣) (م + ٣) = ل م + ٣ ل + ٣ م + ٩

= ل م + ٣ (ل + م) + ٩

= $\frac{-١١}{٢}$ + ٣ × $\frac{١٣}{٢}$ + ٩ = ٢٣

المعادلة هي : س^{٢} − $\frac{٢٥}{٢}$ س + ٢٣ = ٠ ⟸ ٢ س^{٢} − ٢٥ س + ٤٦ = ٠

تدريب (٢): إذا كان ل ، م جذري المعادلة س^{٢} − ٣ س − ٦ = ٠ أوجد المعادلة التي جذراها :

ل + ٢ ، م + ٢

مثال محلول (٤):

إذا كان ل ، م جذري المعادلة ٢س^{٢} + ٧س − ٤ = ٠ أوجد المعادلة التي جذراها $\frac{ل}{م}$ ، $\frac{م}{ل}$

الحـــــــــــل

ل + م = − $\frac{٧}{٢}$ ، ل م = −٢

مجموع الجذرين $= \frac{ل}{م} + \frac{م}{ل} = \frac{ل^٢ + م^٢}{ل م} = \frac{(ل + م)^٢ - ٢ ل م}{ل م} = - \frac{٦٥}{٨}$

حاصل ضرب الجذرين $= \frac{ل}{م} \times \frac{م}{ل} = ١$

المعادلة هى: $س^٢ - (- \frac{٦٥}{٨})$ س + ١ = صفر ⟸ ٨ $س^٢$ + ٦٥ س + ٨ = صفر

تدريب (٣):

إذا كان ل ، م جذري المعادلة $س^٢$ – ٣س – ٥ = ٠ أوجد المعادلة التي جذراها $\frac{ل}{م}$ ، $\frac{م}{ل}$

مثال محلول (٥):

إذا كان ل ، م جذري المعادلة $س^٢$ – ٧ س + ١٢ = ٠ أوجد المعادلة التي جذراها ($ل^٢$ + $م^٢$) ، (ل – م) حيث ل > م

الحـــــــــل

المعادلة يمكن تحليلها وإيجاد جذريها وهما ٣ ، ٤ ⟸ ل = ٤ ، م = ٣

مجموع الجذرين = ($ل^٢$ + $م^٢$) + (ل – م) = ٢٦

حاصل ضرب الجذرين = ($ل^٢$ + $م^٢$) (ل – م) = ٢٥

المعادلة هي : $س^٢$ – ٢٦ س + ٢٥ = صفر (على الطالب الحل بطريقة أخرى)

تدريب (٤):

إذا كان ل ، م جذري المعادلة : $س^٢$ – ٢ س – ٧ = ٠ أوجد المعادلة التي جذراها : $ل^٢$ ، $م^٢$

تدريب (٥):

إذا كان ل ، م جذري المعادلة $س^٢$ – ٢ س + ٣ = ٠ أوجد المعادلة التي جذراها :

$ل^٢$ م ، $م^٢$ ل

حل تدريب (١): المعادلة هي : $س^٢ - ١٤س + ٥٨ = ٠$

حل تدريب (٢): المعادلة هي : $س^٢ - ١٨س + ٤٩ = ٠$

حل تدريب (٣): المعادلة هي : $س^٢ - ٧س + ٤ = ٠$

حل تدريب (٤): المعادلة هي : $٥س^٢ + ١٩س + ٥ = ٠$

حل تدريب (٥): المعادلة هي : $س^٢ - ٦س + ٢٧ = ٠$

تمارين على تابع الدرس الرابع

(١) إذا كان ل ، م جذري المعادلة : $س^٢ - ٣ س - ٥ = ٠$ أوجد المعادلة التي جذراها ل + ٣ ، م + ٣

(٢) إذا كان ل ، م جذري المعادلة : $٢ س^٢ - ٦ س + ٣ = ٠$ أوجد المعادلة التي جذراها $\frac{ل}{م}$ ، $\frac{م}{ل}$

(٣) إذا كان ل ، م جذري المعادلة : $٢ س^٢ - س - ٣ = ٠$ حيث ل > م أوجد المعادلة التي جذراها

$ل + \frac{١}{٢}$ ، $م + ٤$

(٤) إذا كان ل ، م جذري المعادلة : $س^٢ - ٥ س + ٢ = ٠$ أوجد المعادلة التي جذراها $ل^٢$ ، $م^٢$

(٥) إذا كان ل ، م جذري المعادلة : $س^٢ - ٥ س + ٣ = ٠$ فأوجد بدون إستخدام الحاسبة القيمة العددية

لكل من : ☜ $ل^٢ + م^٢$ ☜ $\frac{٢}{ل} + \frac{٢}{م}$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(٦) المعادلة التربيعية التي جذراها : ٣ ت ، - ٣ ت هي ....

(أ) $س^٢ - س + ٣ = ٠$ (ب) $س^٢ + س + ٩ = ٠$

(جـ) $س^٢ + ٩ = ٠$ (د) $س^٢ + ٦ ت = ٠$

(٧) إذا كان ل ، م جذري المعادلة : $س^٢ - ٥س + ٢ = ٠$ فإن قيمة المقدار : $م^٢ - ٥م + ٢$ تساوى ....

(أ) صفر (ب) −٤ (جـ) ١ (د) −١

(٨) إذا كان ل ، م جذري المعادلة : $س^٢ - ٧ س + ١٠ = ٠$ حيث ل > م فإن : $ل^٢ - م^٢ =$ ......

(أ) ٢١ (ب) ٦٣ (جـ) $٤٠\sqrt{١٣}$ (د) $٩\sqrt{٧}$

(٩) المعادلة التربيعية التي كل من جذريها يزيد بمقدار ٢ عن كل من جذرى المعادلة : $س^٢ - ٣س + ٢ = ٠$

هي ......

(أ) $س^٢ - ٣س + ٢ = ٠$ (ب) $س^٢ + ٧س + ١٢ = ٠$

(جـ) $س^٢ - ٧س + ١٢ = ٠$ (د) $س^٢ - ٧س - ١٢ = ٠$

(١٠) إذا كان ل ، م جذري المعادلة : $٢س^٢ + ٣س - ١ = ٠$ فإن : $٤ل^٢ + ٦ل =$ ......

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

اجابات تمارين على تابع الدرس الرابع

(١) $س^٢ - ٩ س + ١٣ = ٠$

(٢) $س^٢ - ٤ س + ١ = ٠$

(٣) $س^٢ - ٥ س + ٦ = ٠$

(٤) $س^٢ - ٢١ س + ٤ = ٠$

(٥) ٢١ ، $\frac{١٠}{٣}$

(٦) $س^٢ + ٩ = ٠$

(٧) صفر

(٨) ٢١

(٩) $س^٢ - ٧س + ١٢ = ٠$

(١٠) ٢

الدرس الخامس : إشارة الدالة

ملخص الدرس : المقصود ببحث إشارة الدالة هو تحديد قيم المتغير س (مجال س) التي تكون عندها قيم الدالة د على النحو الآتى:

موجبة أي : د(س) > ٠

سالبة أي : د(س) < ٠

مساوية للصفر : د(س) = ٠

أولًا : بحث الدالة الثابتة: الصورة العامة لها : د(س) = جـ حيث : جـ ≠ صفر

إشارة الدالة د مثل إشارة جـ لكل س ∈ ع

مثال محلول (١):

☜ إشارة الدالة : د (س) = ٧ موجبة لكل س ∈ ع

☜ إشارة الدالة : د (س) = −٣ سالبة لكل س ∈ ع

تدريب (١): إشارة الدالة د (س) = −٧ تكون .... لكل س ∈ ع

ثانيًا : إشارة الدالة الخطية: الصورة العامة لها : د(س) = ب س + جـ ، ب ≠ ٠

إشارة الدالة مثل إشارة ب عندما س > $-\frac{جـ}{ب}$

إشارة الدالة تخالف إشارة ب عندما س < $-\frac{جـ}{ب}$

د (س) = ٠ عندما س = $-\frac{جـ}{ب}$

مثال محلول (٢): إبحث إشارة الدالة : د (س) = ٣ س + ٦

الحـــــــــــل

٣س + ٦ = ٠ ⟸ ٣س = − ٦ ⟸ س = −٢

إشارة الدالة موجبة عندما : س > -٢

إشارة الدالة سالبة عندما : س < -٢

د (س) = ٠ عندما : س = -٢

مثال محلول (٣): إبحث إشارة الدالة : د (س) = ٥ - س

الحــــــــــل

٥ - س = ٠ ⟸ س = ٥

إشارة الدالة سالبة عندما : س > ٥

إشارة الدالة موجبة عندما : س < ٥

د (س) = ٠ عندما : س = ٥

تدريب (٢): أكمل مايأتى :

(١) الدالة د : د (س) = ٤س - ٤ تكون سالبة في الفترة ....

(٢) الدالة : ص = ٣ - س موجبة في الفترة ....

(٣) إذا كانت : د (س) = ٥ - س فإن : د (س) > ٠ لكل س ∈ ....

(٤) إذا كانت : د (س) = -٦س فإن : د (س) تكون موجبة عندما س ∈ ....

ثالثًا : إشارة الدالة التربيعية : الصورة العامة لها : د (س) = أس^{٢} + ب س + جـ

حيث : أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية ، أ ≠ ٠

☜ إذا كان الجذران حقيقيان مختلفان ل ، م وبفرض أن : ل < م

إشارة الدالة مثل إشارة أ عندما س ∈ ح - [ل ، م]

إشارة الدالة تخالف إشارة أ عندما س ∈] ل ، م [

د (س) = صفر عندما س ∈ { ل ، م }

مثال محلول (٤): إبحث إشارة الدالة د : د (س) = س^{٢} – ٣س – ٤ موضحًا ذلك على خط الأعداد

الحـــــــــل

س^{٢} – ٣ س – ٤ = ٠

(س – ٤) (س + ١) = ٠ ⬅ س = ٤ أ، س = –١

إشارة الدالة موجبة عندما س ∈ ح – [–١ ، ٤]

إشارة الدالة سالبة عندما س ∈] –١ ، ٤ [

د (س) = صفر عندما س ∈ { –١ ، ٤ }

س

مثال محلول (٥): إبحث إشارة الدالة د : د (س) = ٦ – س – س^{٢} موضحًا ذلك على خط الأعداد

الحـــــــــل

٦ – س – س^{٢} = ٠

س^{٢} + س – ٦ = ٠ ⬅ (س + ٣) (س – ٢) = ٠ ⬅ س = –٣ أ، س = ٢

إشارة الدالة سالبة عندما س ∈ ح – [–٣ ، ٢]

إشارة الدالة موجبة عندما س ∈] –٣ ، ٢ [

د (س) = صفر عندما س ∈ { –٣ ، ٢ }

إشارة د(س) ‎------------ | ++++++++++ | ------------
(صفر عند –٣ ، صفر عند ٢)

س ‎–∞ ‎–٣ ‎٢ ‎∞

تدريب (٣):

(١) إبحث إشارة الدالة د : د (س) = س^{٢} – ٤س + ٣ موضحًا ذلك على خط الأعداد.

(٢) إبحث إشارة الدالة د : د (س) = ١٢ – ٥س – ٢س^{٢} موضحًا ذلك على خط الأعداد.

(٣) إبحث إشارة الدالة د : د (س) = ٣ − $س^٢$ + ٢س موضحًا ذلك على خط الأعداد.

(٤) إبحث إشارة الدالة د : د (س) = ٢$س^٢$ + ٥س − ٣ موضحًا ذلك على خط الأعداد.

☜ إذا كان الجذران حقيقيان متساويان (كل منهما يساوى ل) :

إشارة الدالة مثل إشارة أ عندما س ≠ ل أو ح − { ل }

د (س) = صفر عندما س = ل

مثال محلول (٦): إبحث إشارة الدالة د : د (س) = $س^٢$ − ٤س + ٤ موضحًا ذلك على خط الأعداد

الحـــــــــل

$س^٢$ − ٤س + ٤ = ٠

(س − ٢) (س − ٢) = ٠ ⟸ س = ٢

إشارة الدالة موجبة عندما س ≠ ٢

د (س) = صفر عندما س = ٢

إشارة د(س) ++++++++ $\overset{\text{صفر}}{|}$ ++++++

س −∞ ٢ ∞

تدريب (٤):

(١) إبحث إشارة الدالة د : د (س) = −١ + ٢س − $س^٢$ موضحًا ذلك على خط الأعداد.

(٢) إبحث إشارة الدالة د : د (س) = $س^٢$ − ٨س + ١٦ موضحًا ذلك على خط الأعداد.

☜ إذا كان الجذران مركبان (غير حقيقيان) :

إذا كان : $ب^٢$ − ٤ أ جـ < ٠ فإنه لاتوجد جذور حقيقية وتكون إشارة الدالة مثل إشارة معامل $س^٢$

مثال محلول (٧): إبحث إشارة الدالة د : د (س) = $س^٢$ − ٣س + ٥

الحـــــــــل

س^{٢} − ٣ س + ٥ = ٠

المميز = ب^{٢} − ٤ أ جـ = ٩ − ٢٠ = − ١١ < ٠

الجذران غير حقيقيان ⟸ إشارة الدالة موجبة

تدريب (٥):

(١) إبحث إشارة الدالة د : د (س) = س^{٢} − ٤س + ٧

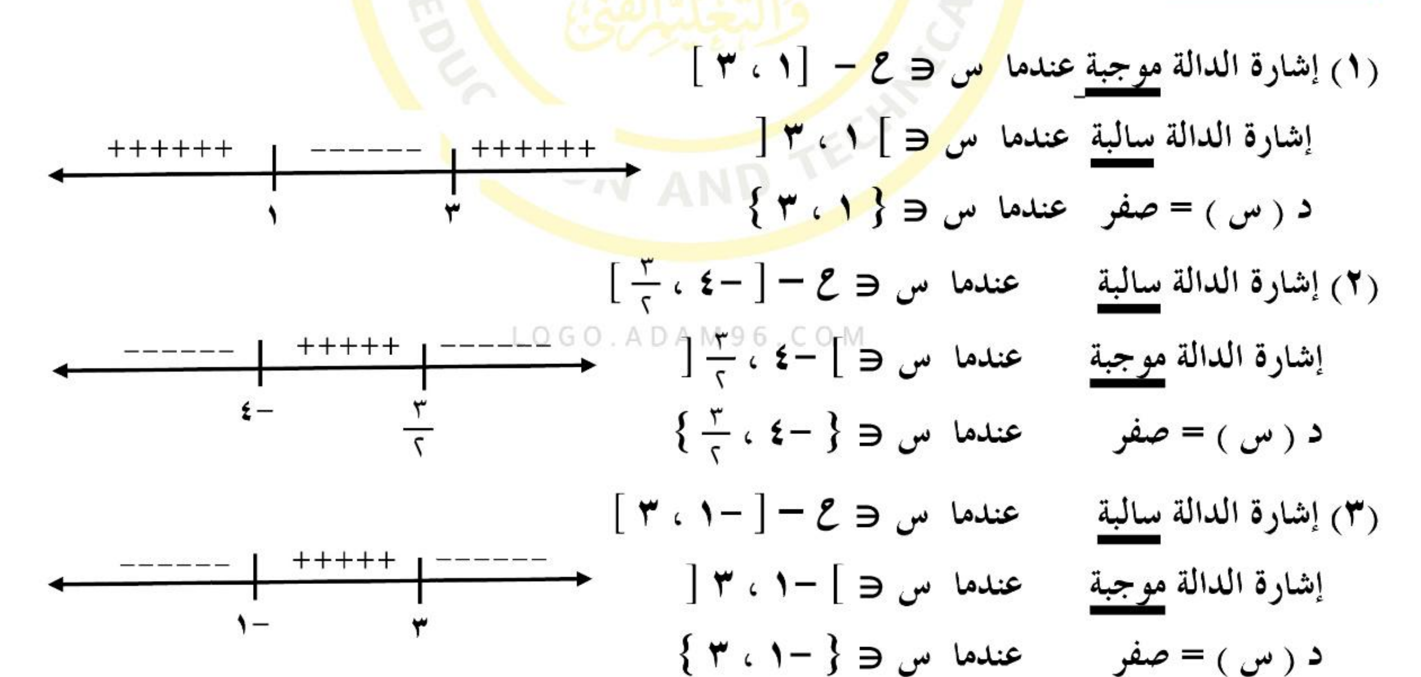
(٢) إبحث إشارة الدالة د : د (س) = − س^{٢} − ٩

حل تدريب (١): سالبة

حل تدريب (٢):

(١)]− ∞ ، ١[(٢)]− ∞ ، ٣[(٣)]− ∞ ، ٥[(٤)]− ∞ ، ٠[

حل تدريب (٣):



(١) إشارة الدالة موجبة عندما س ∈ ح − [١ ، ٣]

إشارة الدالة سالبة عندما س ∈]١ ، ٣[

د (س) = صفر عندما س ∈ {١ ، ٣}

(٢) إشارة الدالة سالبة عندما س ∈ ح − [−٤ ، $\frac{٣}{٢}$]

إشارة الدالة موجبة عندما س ∈]−٤ ، $\frac{٣}{٢}$[

د (س) = صفر عندما س ∈ {−٤ ، $\frac{٣}{٢}$}

(٣) إشارة الدالة سالبة عندما س ∈ ح − [−١ ، ٣]

إشارة الدالة موجبة عندما س ∈]−١ ، ٣[

د (س) = صفر عندما س ∈ {−١ ، ٣}

(٤) إشارة الدالة موجبة عندما س ∈ ح − [−٣ ، $\frac{١}{٢}$]

إشارة الدالة سالبة عندما س ∈]−٣ ، $\frac{١}{٢}$[

د (س) = صفر عندما س ∈ {−٣ ، $\frac{١}{٢}$}

++++++ −٣ ------ $\frac{١}{٢}$ ++++++

حل تدريب (٤):

(١) إشارة الدالة سالبة عندما س ≠ ١

د (س) = صفر عندما س = ١

-------- صفر -------- (١)

(٢) إشارة الدالة موجبة عندما س ≠ ٤

د (س) = صفر عندما س = ٤

++++++++ صفر ++++++++ (٤)

حل تدريب (٥):

(١) ب^{٢} − ٤ أ جـ < ٠ الجذران غير حقيقيان ⟸ إشارة الدالة موجبة

(٢) الجذران غير حقيقيان ⟸ إشارة الدالة سالبة

تمارين على الدرس الخامس

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إشارة الدالة د : د(س) = ٦ − ٢س تكون غير موجبة عند ....

(أ) س < ٣　(ب) س ≥ ٣　(جـ) س > ٣　(د) س ≤ ٣

(٢) الدالة د : د(س) = م لها إشارة .... دائماً

(أ) مثل إشارة م　(ب) تخالف إشارة م　(جـ) موجبة　(د) سالبة

(٣) الدالة د : د(س) = س^{٢} − ٤ سالبة لكل س ∈ ....

(أ) ح − [−٢ ، ٢]　(ب)]−٢ ، ٢[　(جـ)]−∞ ، −٤[　(د)]−∞ ، −٢[

(٤) إشارة الدالة د : د(س) = أس + ب على ح تكون مثل إشارة ب إذا كان …………

(أ) أ = ب (ب) أ = صفر (جـ) أ < صفر (د) أ < صفر

(٥) الدالة د : د (س) = أس^{٢} + ب س + جـ يكون لها إشارة واحدة في ح عندما …………

(أ) ب^{٢} − ٤ أ جـ > صفر (ب) ب^{٢} − ٤ أ جـ < صفر

(جـ) ب^{٢} − ٤ أ جـ = صفر (د) ب^{٢} − ٤ أ جـ ≤ صفر

(٦) الفترة التي تكون فيها الدالة د : د (س) = س^{٢} − ٥س + ٦ موجبة هي …………

(أ) ح − [٢ ، ٣] (ب) ح −] ٢ ، ٣ [(جـ) ح − { ٢ ، ٣ } (د) [٢ ، ٣]

(٧) الدالة د : د (س) = (س −١) (س + ٣) تكون موجبة في الفترة …………

(أ) ح − [−٣ ، ١] (ب) ح −] −٣ ، ١ [(جـ) [−٣ ، ١] (د)] −٣ ، ١[

(٨) أكمل : إذا كانت : د (س) = ٣ − ٢س فإن : د (س) تكون موجبة عندما …………

(٩) إبحث إشارة الدالة د : د (س) = ٢س − س^{٢} + ٣ موضحًا ذلك على خط الأعداد.

(١٠) إبحث إشارة الدالة د : د (س) = ٨ − ٢س − س^{٢}

اجابات تمارين على الدرس الخامس

(١) س ≤ ٣

(٢) مثل إشارة أ

(٣)] −٢ ، ٢ [

(٤) أ = صفر

(٥) ب^{٢} − ٤ أ جـ < صفر

(٦) ح − [٢ ، ٣]

(٧) ح − [−٣ ، ١]

(٨) س > $\frac{٣}{٢}$

(٩) إشارة الدالة سالبة عندما س ∈ ح − [−١ ، ٣]

إشارة الدالة موجبة عندما س ∈] −١ ، ٣ [

د (س) = صفر عندما س ∈ { −١ ، ٣ }

------ | ++++++ | ------

−١ ٣

(١٠) إشارة الدالة سالبة عندما س ∈ ح − [−٤ ، ٢]

إشارة الدالة موجبة عندما س ∈] −٤ ، ٢ [

د (س) = صفر عندما س ∈ { −٤ ، ٢ }

الدرس السادس: متباينات الدرجة الثانية فى مجهول واحد

ملخص الدرس :

لحل متباينات الدرجة الثانية فى مجهول واحد نتبع الآتى :

(١) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة ص = د(س)

(٢) ندرس إشارة الدالة د المرتبطة بالمتباينة

(٣) تحديد مجموعة حل طبقًا للفترات التي تحققها

مثال محلول (١): أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : س٢ + ٢س − ٨ > ٠

الحـــــــــــل

د(س) = س٢ + ٢س − ٨

س٢ + ٢س − ٨ = ٠

(س + ٤) (س − ٢) = ٠

س = −٤ أ، س = ٢

إشارة الدالة موجبة عندما س ∈ ح − [−٤ ، ٢]

إشارة الدالة سالبة عندما س ∈]−٤ ، ٢[

د (س) = صفر عندما س ∈ {−٤ ، ٢}

++++++ ------ ++++++

−٤ ٢

م٠ح = ح − [−٤ ، ٢] أو م٠ح =]−∞ ، −٤[∪]٢ ، ∞[

مثال محلول (٢): أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : ٧ س + ١٥ ≥ ٢س٢

٧ س + ١٥ − ٢س٢ ≥ ٠

د(س) = ٧ س + ١٥ − ٢س٢

٢س٢ − ٧س − ١٥ = ٠

$(٢س + ٣)(س - ٥) = ٠$

س $= -\frac{٣}{٢}$ أ، س $= ٥$

إشارة الدالة سالبة عندما س $\in$ ح $- [-\frac{٣}{٢} ، ٥]$

إشارة الدالة موجبة عندما س $\in$ $]-\frac{٣}{٢} ، ٥[$

د (س) = صفر عندما س $\in \{-\frac{٣}{٢} ، ٥\}$

------ | +++++ | ------

$-\frac{٣}{٢}$ ٥

م٠ح = ح $-]-\frac{٣}{٢} ، ٥[$ أو م٠ح $=]-\infty ، -\frac{٣}{٢}] \cup [٥ ، \infty[$

تدريب (١):

(١) أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : $س^٢ - ٤س + ٤ \leq ٠$

(٢) أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : $٦س - س^٢ - ٩ < ٠$

(٣) أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : $٢س + س^٢ + ٥ < ٠$

حل تدريب (١):

(١) $د(س) = س^٢ - ٤س + ٤$

$س^٢ - ٤س + ٤ = ٠$

س $= ٢$

صفر

++++++++ | ++++++++

٢

إشارة الدالة موجبة عندما س $\neq ٢$

د (س) = صفر عندما س $= ٢$ ⟸ م٠ح = ح

(٢) $د(س) = ٦س - س^٢ - ٩$

$س^٢ - ٦س + ٩ = ٠$

س $= ٣$

إشارة الدالة **سالبة** عندما س $\neq$ ٣

د(س) = صفر عندما س = ٣

م٠ح = ح − { ٣ } أو م٠ح =]− ∞ ، ٣ [∪] ٣ ، ∞ [

(٣) د(س) = ٢س + س^{٢} + ٥

س^{٢} + ٢س + ٥ = ٠

الجذران مركبان ⟸ إشارة الدالة موجبة ⟸ م٠ح = $\emptyset$

تمارين على الدرس السادس

أوجد مجموعة حل المتباينات التربيعية الآتية في ح :

(١) س^{٢} $\geq$ ٩

(٢) ٢س − س^{٢} $<$ ٠

(٣) س^{٢} + ٥ $\geq$ ١

(٤) (س − ٢) (س − ٥) $<$ ٠

(٥) س^{٢} $\leq$ ٦س − ٩

(٦) س (س + ٢) − ٣ $\geq$ ٠

(٧) ٥ − ٢س $\geq$ س^{٢}

(٨) ٣س^{٢} $\geq$ ١١س + ٤

(٩) س^{٢} − ٨س + ١٦ $\leq$ ٠

(١٠) ٧ + س^{٢} − ٤س $<$ ٠

اجابات تمارين على الدرس السادس

(١) م٠ح = [− ٣ ، ٣]

(٢) م٠ح = ع − [٠ ، ٢]

(٣) م٠ح = Ø

(٤) م٠ح =]٢ ، ٥[

(٥) م٠ح = ع

(٦) م٠ح = [− ٣ ، ١]

(٧) م٠ح = ع −]− ٣,٤ ، ١,٤[

(٨) م٠ح = [$-\frac{١}{٣}$ ، ٤]

(٩) م٠ح = ع

(١٠) م٠ح = Ø

تمارين عامة على الوحدة الأولى

أكمل العبارات الآتية :

(١) في المعادلة : س^{٢} + ٣ س – ٤ = ٠ حاصل ضرب الجذرين = ...

(٢) المعادلة التي جذراها ٣ ، ٢ هي ....

(٣) د(س) = س – ٣ تكون سالبة عندما س ∋ ....

(٤) إذا كان : س = ٢ أحد جذري المعادلة : م س^{٢} – ٥س + م = ٠ فإن : م = ...

(٥) إذا كان أحد جذري المعادلة : ٥ س^{٢} + (ك – ٣) س – ٩ = ٠ معكوس جمعي للجذر الآخر

فإن : ك = ...

(٦) إذا كان جذرى المعادلة : س^{٢} – ٨ س + جـ = ٠ متساويين فإن : جـ = ...

(٧) إذا كان جذري المعادلة : س^{٢} + ٣ س – ٥ = ٠ هما ل ، م فإن : ل^{٢} + م^{٢} = ...

(٨) المعادلة التربيعية التى جذراها (١ + ت) ، (١ – ت) حيث ت^{٢} = –١ هى ....

(٩) أبسط صورة للعدد التخيلى (ت^{٦٥}) هى ....

(١٠) مجموعة حل المتباينة : س^{٢} + ٣ س – ٤ ≥ ٠ فى ح هى ....

(١١) أبسط صورة للمقدار : (١ – ت)^{١٠} هى ....

(١٢) إذا كانت : ٣ س + ٢ ص ت – ٦ + ٤ س ت = ٠ فإن : (س ، ص) = ...

(١٣) إذا كان : ل ، م جذرا المعادلة : س^{٢} + ٤ س – ٣ = ٠ فكوِّن المعادلة التي جذراها : ل + ٥ ، م + ٥

(١٤) إذا كان : ل ، م هما جذري المعادلة : ٢ س^{٢} + س – ٥ = ٠ فأوجد المعادلة التي جذراها $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$

(١٥) إذا كان : ل ، م هما جذرا المعادلة : س^{٢} – ٧ س + ٣ = ٠ فأوجد المعادلة التي جذراها ٥ ل^{٢}، ٥ م^{٢}

(١٦) إذا كان : جذرا المعادلة ٢ س^{٢} + ٥ س = ٤ ك متساويين أوجد قيمة ك

(١٧) بين نوع جذرى المعادلة : $س^٢ + ٢ س + ٤ = ٠$ ثم اوجد مجموعة الحل فى مجموعة الأعداد المركبة

(١٨) إبحث إشارة الدالة : د(س) = $٦ + ٥س - س^٢$ فى ح ،

ثم اوجد مجموعة الحل للمتباينة : د(س) > ٠

(١٩) أوجد قيمتى س ، ص إذا كان : $\frac{(٢ - ت)(٢ + ت)}{٣ + ٤ت}$ = س + ص ت

(٢٠) أوجد فى أبسط صورة : $(٥ - ت)^٢ - (٢ + ت) (٣ + ٢ ت)$

اجابات تمارين عامة على الوحدة الأولى

(١) -٤

(٢) $س^٢ - ٥س + ٦ = ٠$

(٣)]-∞ ، ٣]

(٤) ٢

(٥) ٣

(٦) ١٦

(٧) ١٩

(٨) $س^٢ - ٢س + ٢ = ٠$

(٩) ت

(١٠)]-٤ ، ١]

(١١) -٣٢ ت

(١٢) (٢ ، -٤)

(١٣) $س^٢ - ٦س + ٢ = ٠$

(١٤) $٥س^٢ - س - ٢ = ٠$

(١٥) $س^٢ - ٢١٥س + ٢٢٥ = ٠$

(١٦) $-\frac{٢٥}{٣٢}$

(١٧) الجذران مركبان ،

م٠ح = { -١ + $\sqrt{٣}$ ت ، -١ - $\sqrt{٣}$ ت }

(١٨) <u>سالبة</u> عندما س ∈ ح - [-١ ، ٦]

<u>موجبة</u> عندما س ∈] -١ ، ٦ [

د(س) = صفر عندما س ∈ { -١ ، ٥ }

م٠ح =] -١ ، ٦ [

(١٩) س = $\frac{٣}{٥}$ ، ص = $-\frac{٤}{٥}$

(٢٠) ٢٠ - ١٧ت

اختبار (١) على الوحدة الأولى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

(١) جذرا المعادلة : $ب س^{٢} - أ س + جـ = ٠$ يكونان عددان مركبان إذا كان ....

(أ) $ب^{٢} - ٤ أ جـ < ٠$ (ب) $أ^{٢} - ٤ب جـ < ٠$

(جـ) $جـ^{٢} - ٤ب أ > ٠$ (د) $ب^{٢} - ٤ أ جـ > ٠$

(٢) المعادلة التربيعية التى جذراها (٣ − ت) ، (٣ + ت) هى ....

(أ) $س^{٢} - ٦س - ١٠ = ٠$ (ب) $س^{٢} - ٦س + ١٠ = ٠$

(جـ) $س^{٢} + ٦س - ١٠ = ٠$ (د) $س^{٢} + ٦س + ١٠ = ٠$

(٣) إذا كان : $د(س) = ٤ - ٢س$ فإن إشارتها تكون سالبة فى الفترة ....

(أ) $]٢ ، ∞[$ (ب) $]٢ ، ٤[$ (جـ) $[٢ ، ٤]$ (د) $]-٢ ، ∞[$

(٤) مجموعة حل المعادلة : $س^{٢} + ٢٥ = ٠$ فى ك هى ....

(أ) $\{٥ ، -٥\}$ (ب) $\{-٣ت\}$ (جـ) $\{٥ت ، -٥ت\}$ (د) $\emptyset$

(٥) $١ + ت + ت^{٢} + ت^{٣} + ت^{٤} + ... + ت^{١٦} =$ ....

(أ) ت (ب) ١ (جـ) ١٦ (د) ٤

(٦) إذا كان جذرا المعادلة : $٤ س^{٢} - ١٢س + جـ = ٠$ حقيقيان متساويان

فإن : جـ = ...

(أ) ٣ (ب) ١٤٤ (جـ) ١٦ (د) ٩

(٧) مرافق العدد $(ت - ت^{٢}) =$ ....

(أ) ١ − ت (ب) ١ + ت (جـ) − ت − ١ (د) ت − ١

(٨) إذا كان أحد جذرى المعادلة : س^{٢} – (٢ب – ١٨) س – ٥ = ٠ معكوسًا جمعيًا للآخر

فإن ب = ...

(أ) –٥ (ب) ٩ (جـ) ٥ (د) –٩

(٩) إذا كان جذرا المعادلة : س^{٢} + ٤س + ك = ٠ حقيقيين فإن : ك ∈ ....

(أ) [٤ ، ∞[(ب)]٤ ، ∞[(جـ)]–∞ ، ٤] (د)]–∞ ، ٤[

(١٠) إذا كان : (١ + ت^{٤}) (١ – ت^{٧}) = س + ت ص فإن : س + ص = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) –٣ (د) ١

(١١) مجموعة حل المتباينة : س (س – ٢) ≤ ٠ فى ح هى ....

(أ) {٠ ، ٢} (ب) [٠ ، ٢] (جـ) ح – [٠ ، ٢] (د) ح –]٠ ، ٢[

(١٢) إذا كان أحد جذرى المعادلة : أ س^{٢} + ٢س + ٥ = ٠ معكوسًا ضربيًا للجذر الآخر

فإن : أ = ...

(أ) –٥ (ب) –٢ (جـ) ٢ (د) ٥

(١٣) إذا كان : ١ + ت أحد جذرى المعادلة : س^{٢} – ٢س + جـ = ٠ حيث جـ ∈ ح

فإن : جـ = ...

(أ) –٥ (ب) –٢ (جـ) ٤ (د) ٢

(١٤) الدالة د : د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ يكون لها إشارة واحدة فى ح عندما ....

(أ) ب^{٢} – ٤ أ جـ < ٠ (ب) ب^{٢} – ٤ أ جـ ≥ ٠

(جـ) ب^{٢} – ٤ أ جـ = ٠ (د) ب^{٢} – ٤ أ جـ ≤ ٠

(١٥) (١ + ت) (١ + ت^{٢}) (١ + ت^{٣}) (١ + ت^{٤}) (١ + ت^{٥}) = ...

(أ) ٢ (ب) –١ (جـ) ١ (د) صفر

وزارة التربية والتعليم
الإدارة المركزية لتطوير المناهج
إدارة تنمية مادة الرياضيات

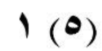
اجابات اختبار (١) على الوحدة الأولى

(١) أ^{٢} − ٤ب جـ < ٠

(٢) س^{٢} − ٦س + ١٠ = ٠

(٣) [٢ ، ∞]

(٤) {٥ ت ، −٥ ت}



(٥) ١

(٦) ٩

(٧) ١ − ت

(٨) ٩

(٩)]−∞ ، ٤[

(١٠) ٤

(١١) ح − [٠ ، ٢]

(١٢) ٥

(١٣) ٢

(١٤) ب^{٢} − ٤ أ جـ < ٠

(١٥) صفر

اختبار (٢) على الوحدة الأولى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

(١) ت^(-١٣) = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ت (د) −ت

(٢) إذا كان : س + ص ت = (٣ + ت) / ت فإن : س + ص = ...

(أ) ٢ (ب) −١ (جـ) ١ (د) −٢

(٣) إذاكان : س = ٢ أحد جذرى المعادلة : س^٢ + ٢س + ك = ٠ فإن الجذر الآخر هو ....

(أ) ٨ (ب) −٤ (جـ) ٤ (د) −٨

(٤) إذا كان جذرا المعادلة : أ س^٢ − ١٢س + ٩ = ٠ غير حقيقيان فإن : أ تكون ....

(أ) < ٤ (ب) > ٤ (جـ) = ٤ (د) = ١

(٥) مجموع جذرى المعادلة : س (س − ٥) = ٦ هو ....

(أ) ٥ (ب) −٥ (جـ) ٦ (د) −٦

(٦) المعادلة التربيعية التي جذراها : ٣ ت ، −٣ ت هي ....

(أ) س^٢ + ٩ = ٠ (ب) س^٢ − ٩ = ٠ (جـ) س^٢ + ٣ = ٠ (د) س^٢ − ٣ = ٠

(٧) إذا كان : ل ، م هما جذرا المعادلة : س^٢ − ٣س + ٧ = ٠ فإن : المعادلة التي جذراها ل + م ، ل م هى ....

(أ) س^٢ − ١٠س + ٢١ = ٠
(ب) س^٢ + ١٠٦س − ٢١ = ٠
(جـ) س^٢ − ١٠س − ٢١ = ٠
(د) س^٢ + ١٠س + ٢١ = ٠

(٨) إذا كان : ٢س − ٣ < ١ فإن : ٣س ∈ ....

(أ)]−∞ ، ٦[(ب)]−∞ ، ٦] (جـ)]−∞ ، −٦] (د)]−∞ ، −٦[

(٩) إشارة الدالة : د(س) = ٢س − ٨ تكون موجبة عندما س ∋ ....

(أ) [٤ ، ∞[(ب) [− ٤ ، ∞[(جـ)]٤ ، ∞[(د)]− ٤ ، ∞[

(١٠) مجموعة حل المتباينة : س^{٢} < صفر هى ....

(أ) ∅ (ب) ح − { ٠ } (جـ) ح$^{+}$ (د) ح$^{-}$

(١١) إذا كان : (٢ + ت) (٣ + ٢ت) = س + ص ت فإن : س ص = ...

(أ) ١٤ (ب) −٢٨ (جـ) ٢٨ (د) −١٤

(١٢) إذا كان : جذرا المعادلة : ٤س^{٢} − ١٢س + ك = ٠ حقيقيان متساويان. فإن : ك = ...

(أ) ٩ت (ب) −٩ت (جـ) ٩ (د) −٩

(١٣) إذا كان : ل ، م هما جذرا المعادلة : ٢س^{٢} − ٣س − ٥ = ٠ فإن : (ل − م)^{٢} = ...

(أ) ٤٩ (ب) $\frac{٤٩}{٤}$ (جـ) $\frac{٧}{٢}$ (د) ٤

أجب عن الأسئلة الآتية :

(١٤) كون المعادلة التربيعية التي كل من جذريها ضعف كل من جذرى المعادلة : س^{٢} − ٢س + ٩ = ٠

(١٥) إبحث إشارة الدالة : د(س) = س^{٢} − ٤

اجابات اختبار (٢) على الوحدة الأولى

(١) – ت

(٢) –٢

(٣) –٤

(٤) < ٤

(٥) ٥

(٦) س^{٢} + ٩ = ٠

(٧) س^{٢} – ١٠س + ٢١ = ٠

(٨)]– ∞ ، ٦[

(٩)]٤ ، ∞[

(١٠) ∅

(١١) ٢٨

(١٢) ٩

(١٣) $\frac{٧}{٢}$

(١٤) س^{٢} – ٤س + ٣٦ = ٠

(١٥) إشارة الدالة **موجبة** عندما س ∈ ح – [–٢ ، ٢]

إشارة الدالة **سالبة** عندما س ∈]–٢ ، ٢[

د (س) = صفر عندما س ∈ {–٢ ، ٢}

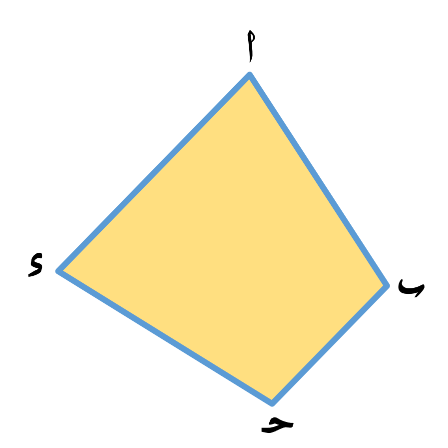
فهرس الوحدة الثانية

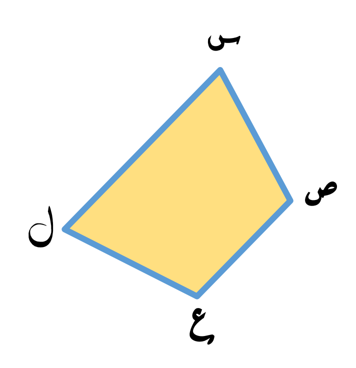
الوحدة الثانية : التشابه

الدرس الأول : تشابه المضلعات

يقال لمضلعين أنهما متشابهين إذا :

- تساوت قياسات زواياهما المتناظرة
- تناسبت اطوال أضلاعهما المتناظرة



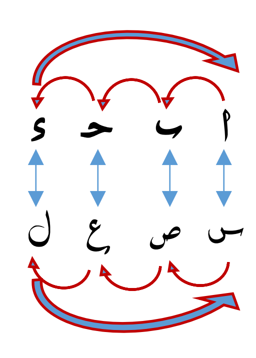


إذا كان المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل

فيكون : $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{ء أ}}{\text{ل س}} =$ ك (نسبة التشابه)

ق (∠ أ) = ق (∠ س) ، ق (∠ ب) = ق (∠ ص)

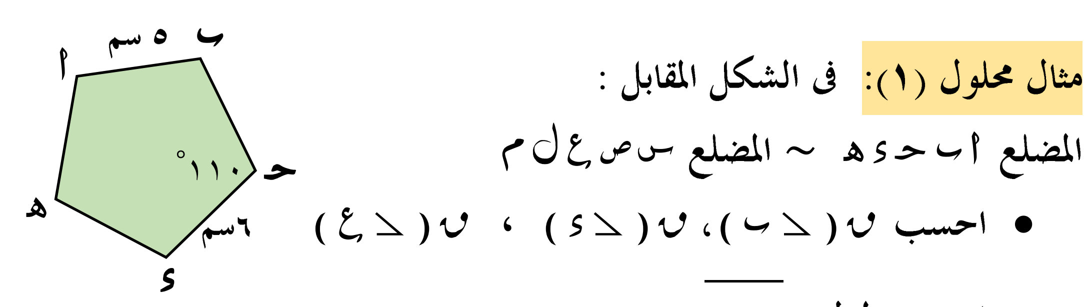
ق (∠ حـ) = ق (∠ ع) ، ق (∠ ء) = ق (∠ ل)

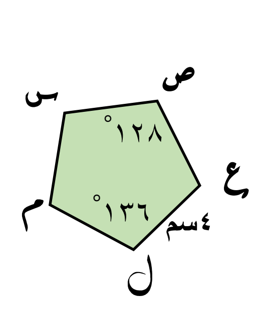


مثال محلول (١): فى الشكل المقابل :

المضلع أ ب حـ ء هـ ~ المضلع س ص ع ل م

- احسب ق (∠ ب) ، ق (∠ ء) ، ق (∠ ع)
- احسب طول : $\overline{\text{س ص}}$





الحـــــــــــــــــل

ق (∠ ب) = ق (∠ ص) = ١٢٨° ، ق (∠ ء) = ق (∠ ل) = ١٣٦°

ق (∠ ع) = ق (∠ حـ) = ١١٠°

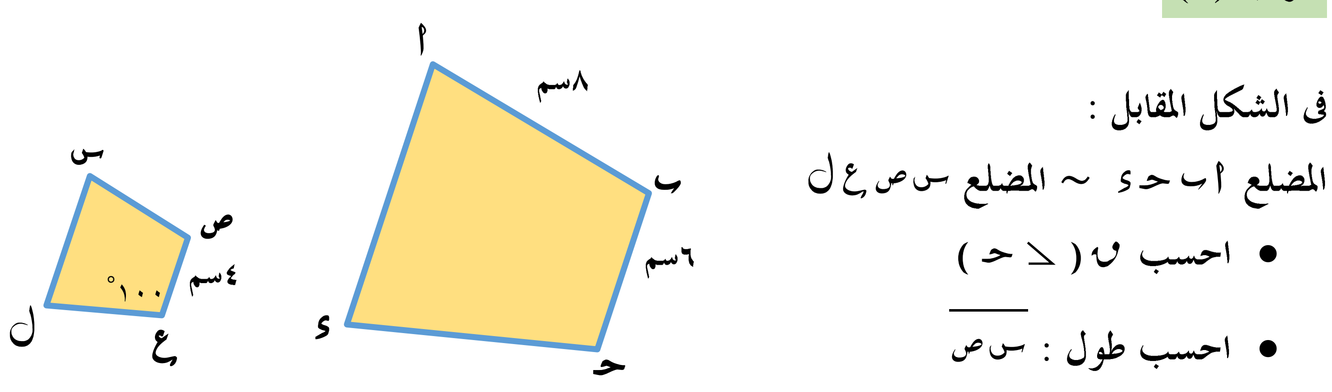
أب / س ص = حـ ء / ع ل ⟵ ٥ / س ص = ٨ / ٦ ⟵ س ص = ٣,٧٥ سم

تدريب (١):

في الشكل المقابل :

المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل

- احسب ق (∠ حـ) ــــــــ
- احسب طول : س ص



ملاحظات :

(١) المضلعان المشابهان لثالث متشابهان.

(٢) المضلعان المتطابقان يكونان متشابهان ولكن ليس من الضرورى أن يكون المضلعان المتشابهان متطابقان.

(٣) كل المضلعات المنتظمة التى لها نفس العدد من الأضلاع تكون متشابهة.

مثال محلول (٢): ضع علامة (✓) أو علامة (✗) أمام العبارات الآتية :

(أ) جميع المربعات متشابهة ( )

(ب) جميع المستطيلات متشابهة ( )

(حـ) جميع المعينات متشابهة ( )

(ء) جميع متوازيات الأضلاع متشابهة ( )

الحـــــــــــــل

(أ) (✓) (ب) (✗) (حـ) (✗) (ء) (✗)

(٤) إذا كان : المضلع $م_١$ ~ المضلع $م_٢$ فإن :

- $\frac{\text{محيط المضلع } م_١}{\text{محيط المضلع } م_٢}$ = ك (معامل التشابه)
- إذا كانت : ك > ١ كان المضلع $م_١$ تكبير للمضلع $م_٢$
- إذا كانت : ٠ < ك < ١ كان المضلع $م_١$ تصغير للمضلع $م_٢$
- إذا كانت : ك = ١ كان المضلع $م_١$ يطابق للمضلع $م_٢$

مثال محلول (٣):

المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل فإذا كان : أ ب = ٣٢ سم ، ب حـ = ٤٠ سم ،
س ص = (٣م − ١) سم ، ص ع = (٣م + ١) سم أوجد قيمة م العددية.

الحـــــــــــــل

$\frac{أ ب}{س ص} = \frac{ب حـ}{ص ع}$ ⟸ $\frac{٣٢}{٣م - ١} = \frac{٤٠}{٣م + ١}$

١٢٠ م − ٤٠ = ٩٦ م + ٣٢ ⟸ م = ٣

تدريب (٢):

مستطيلان متشابهان بُعدا الأول ٨ سم ، ١٢ سم ومحيط الثانى ٢٠٠. أوجد مساحة المستطيل الثانى.

مثال محلول (٤):

مستطيلان متشابهان بُعدا الأول ١٠ سم ، ٦ سم ومعامل التشابه بينه وبين الآخر = $\frac{٢}{٣}$ أوجد مساحة ومحيط المستطيل الآخر.

الحـــــــــــــــــل

نفرض أن طول المستطيل الثانى = س سم ، عرضه = ص سم

$\frac{١٠}{س} = \frac{٦}{ص} = \frac{٢}{٣}$

س = ١٥ سم ، ص = ٩ سم

مساحة المستطيل = ١٥ × ٩ = ١٣٥ سم^{٢}

محيط المستطيل = ٢ (١٥ + ٩) = ٤٨ سم

تدريب (٣):

مستطيل بعداه ١٠ سم ، ٦ سم أوجد مساحة ومحيط مستطيل آخر مشابه له إذا كان معامل التشابه = ٣

المستطيل الذهبى :

هو مستطيل يمكن تقسيمه إلى جزئين أحدهما مربع والآخر مستطيل يشابه المستطيل الأصلى.

إذا كان : المستطيل أ ب حـ ء ~ المستطيل أ ب ص س

فإن : المستطيل أ ب حـ ء يسمى مستطيل ذهبى.

النسبة الذهبية : في كل مستطيل ذهبى يكون نسبة طوله إلى عرضه كنسبة : ١,٦١٨ : ١

مثال محلول (٥):

قطعة نقود ورقية مستطيلة الشكل طولها ١٠,٥٢ سم ، وعرضها ٦,٥ سم. هل المستطيل ذهبى؟

الحـــــــــــــــــل

$\frac{\text{الطول}}{\text{العرض}} = \frac{١٠,٥٢}{٦,٥} = ١,٦١٨$ (النسبة الذهبية) ويكون المستطيل ذهبى

تدريب (٤):

مستطيل ذهبي طوله ١٢ سم ، أوجد عرضه.

حلول التدريبات

تدريب (١): ق (∠ ح) = ١٠٠° ، س ص = $\frac{١}{٣}$٥ سم

تدريب (٢): ٢٤٠٠ سم٢

تدريب (٣): $\frac{٢}{٣}$١٠ سم٢ ، $\frac{٢}{٣}$٦ سم

تدريب (٤): العرض ≃ ٧,٤ سم

تمارين على الدرس الأول

(١) إذا كان المضلعان متطابقان فإن معامل التشابه بينهما ....

(أ) > ١ (ب) < ١ (جـ) $= ١$ (د) $=$ صفر

(٢) إذا كان : المضلع ا ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل فإن : $\frac{\text{ا ب} + \text{ب حـ}}{\text{س ص} + \text{ص ع}} =$ ....

(أ) $\frac{\text{ا ب}}{\text{س ص}}$ (ب) $\frac{\text{٢ ا ب}}{\text{س ص}}$ (جـ) $\frac{\text{ا ب}}{\text{ص ع}}$ (د) ٢ محيط المضلع ا ب حـ ء

(٣) مستطيل بعداه ١٠ سم ، ٨ سم يشابه مستطيل آخر بمعامل تشابه = ٢

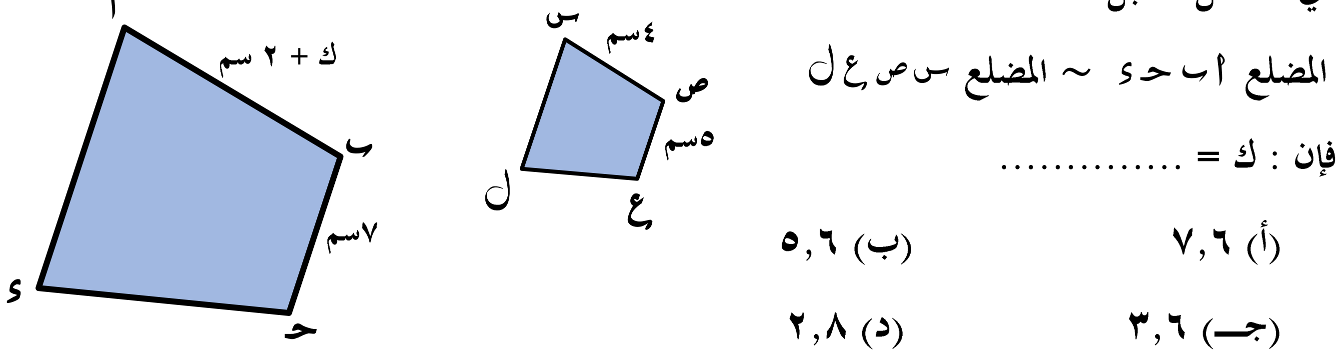
فإن : محيط المستطيل الآخر = ... سم

(أ) ٢٠ (ب) ١٨ (جـ) ١٠ (د) ٥

(٤) جميع المربعات تكون ....

(أ) متساوية في المساحة (ب) متساوية في المحيط (جـ) متشابهة (د) متطابقة

(٥) في الشكل المقابل :



المضلع ا ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل

فإن : ك = ...

(أ) ٧,٦ (ب) ٥,٦

(جـ) ٣,٦ (د) ٢,٨

(٦) إذا كان : المضلع ا ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل وكان : $\frac{\text{ا ب}}{\text{س ص}} = \frac{١٠}{٩}$

فإن : المضلع ا ب حـ ء .... المضلع س ص ع ل

(أ) تكبير (ب) تصغير (جـ) يطابق (د) يساوى

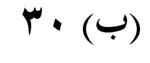
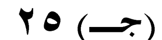
(٧) إذا كان : المثلث أ ب حـ ~ المثلث س ص ع

فإن : محيط المثلث أ ب حـ : محيط المثلث س ص ع = ...

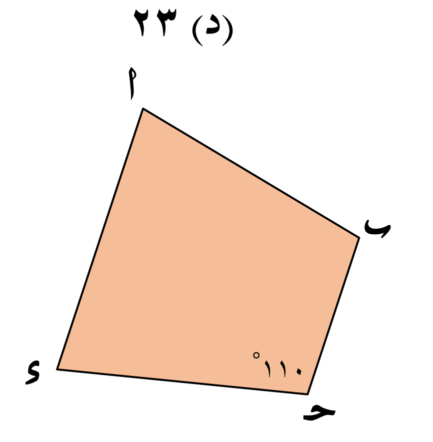
(أ) $\frac{\text{أ ب}}{\text{ص ع}}$ (ب) $\frac{\text{أ ب + ب حـ}}{\text{س ص + ص ع}}$ (جـ) $\frac{\text{٣ أ ب}}{\text{س ص}}$ (د) $\frac{\text{أ ب}}{\text{٣ س ص}}$

(٨) إذا كان : المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع م ن هـ ل وكان : أ ب = ٣٥ سم ، ب حـ = ٤٠ سم ،

م ن = ٢٨ سم ، ن هـ = س + ٩ سم فإن : س = ... سم

(أ) ٣٢  (ب) ٣٠  (جـ) ٢٥ (د) ٢٣

(٩) في الشكل المقابل :



المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل

فإن : ق (∠ ب) = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٥٠°

(جـ) ٤٠° (د) ٣٠°

(١٠) مستطيل ذهبي عرضه يساوى ٦ سم. أوجد طوله

حلول تمارين على الدرس الأول

(١) = ١

(٢) $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}}$

(٣) ١٨

(٤) متشابهة

(٥) ٣,٦

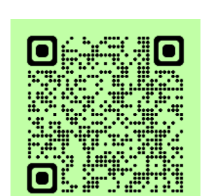
(٦) تكبير

(٧) $\frac{\text{أ ب + ب حـ}}{\text{س ص + ص ع}}$

(٨) ٢٣

(٩) ٤٠°

(١٠) الطول ≃ ٩,٧ سم



الدرس الثانى : تشابه المثلثات

مسلمة : (الحالة الأولى لتشابه مثلثين)

إذا طابقت زاويتان فى مثلث نظائرهما فى مثلث آخر كان المثلثان متشابهان.

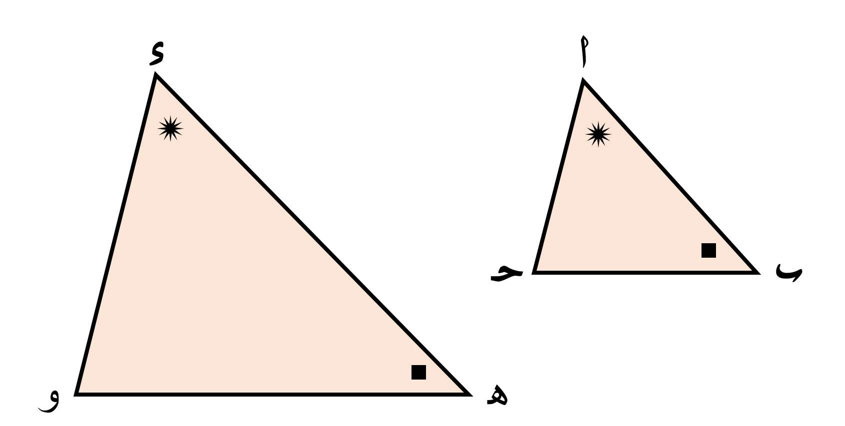
إذا كان :

ق (∠ أ) = ق (∠ د) ،

ق (∠ ب) = ق (∠ هـ)

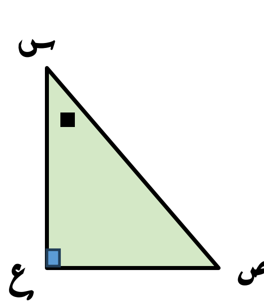
فإن :

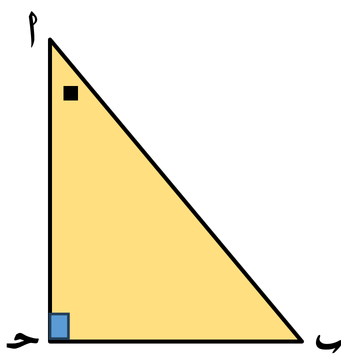
Δ أ ب حـ ~ Δ د هـ و



نتائج :

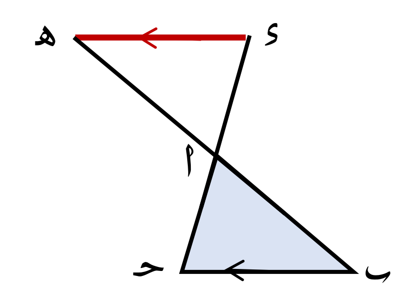
(١) يتشابه المثلثان القائما الزاوية إذا ساوى قياس إحدى الزاويتين الحادتين في أحدهما قياس إحدى الزاويتين الحادتين في الآخر.

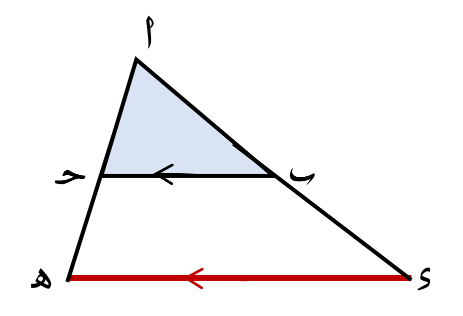


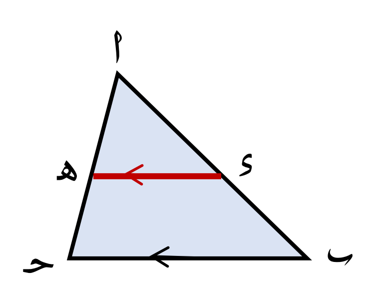


Δ أ ب حـ ~ Δ س ص ع

(٢) إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإن المثلث الناتج يشابه المثلث الأصلى

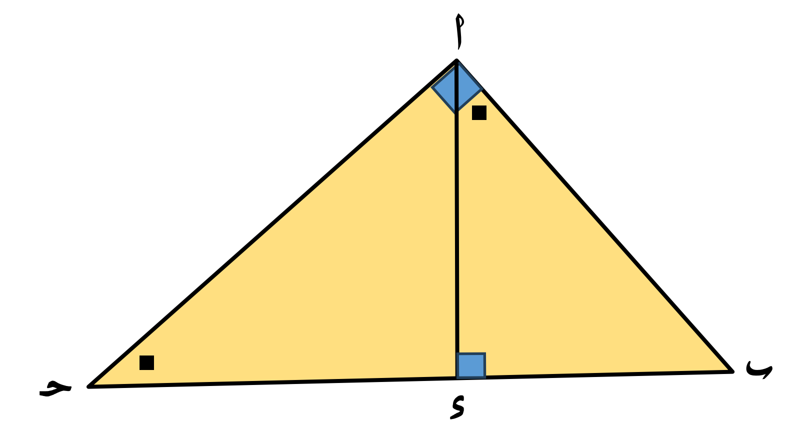






(٣) إذا رسم من رأس القائمة فى المثلث القائم الزاوية عمود على الوتر ، إنقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين وكل

منهما يشابه المثلث الأصلي.



Δ ءاحـ ~ Δ ءحـب

Δ ءاحـ ~ Δ احـب

Δ ءبحـ ~ Δ حـبا

لاحظ أن :

(١) $(أب)^٢$ = بء × بحـ

(٢) $(أء)^٢$ = ءب × ءحـ

(٣) $(أحـ)^٢$ = حـء × حـب

(٤) أب × أحـ = أء × بحـ

مثال محلول (١): في الشكل المقابل :

$\overline{ءهـ} \parallel \overline{بحـ}$ ، أهـ = ٣ سم ، هـحـ = ١ سم ،

بء = ١,٥ سم ، ءهـ = ٤,٥ سم

(١) أثبت أن : Δ أبحـ ~ Δ أءهـ

(٢) أوجد طول كل من : $\overline{أء}$ ، $\overline{بحـ}$

(٣) إذا كان : ق (∠ أ) = ٧٠° فاوجد : ق (∠ ب)

الحـــــــــل

(١) ∵ $\overline{ءهـ} \parallel \overline{بحـ}$ ⟸ ∴ Δ أبحـ ~ Δ أءهـ

(٢) نفرض أن : أء = س سم

$\frac{أب}{أء} = \frac{بح}{ءه} = \frac{أح}{أه}$ ⬅ $\frac{س + ١,٥}{س} = \frac{بح}{٤,٥} = \frac{٤}{٣}$

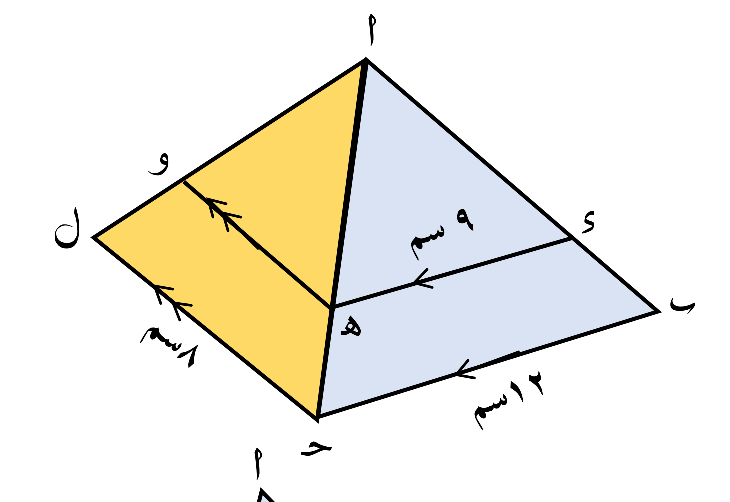
٣ س + ٤,٥ = ٤ س ⬅ س = ٤,٥ سم

٣ ب ح = ١٨ ⬅ ب ح = ٦ سم

(٣) ∵ أ ب = ب ح = ٦ سم ⬅ ∴ ق (∠ أ) = ق (∠ ح) = ٧٠°

∴ ق (∠ ب) = ١٨٠° − (٧٠° + ٧٠°) = ٤٠°

تدريب (١): في الشكل المقابل :



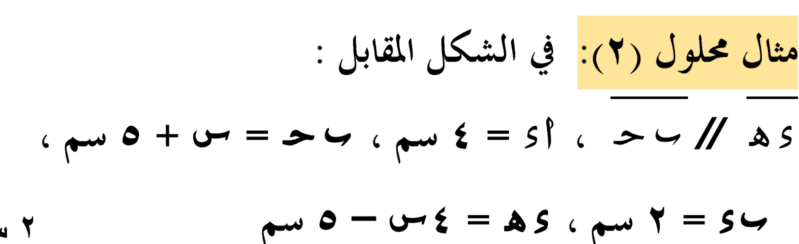
ء ه // ب ح ، ه و // ح ل

ء ه = ٩ سم ، ب ح = ١٢ سم ،

ح ل = ٨ سم

(١) أوجد النسبة : $\frac{أب}{أء}$ (٢) طول ه و

مثال محلول (٢): في الشكل المقابل :



ء ه // ب ح ، أ ء = ٤ سم ، ب ح = س + ٥ سم ،

ب ء = ٢ سم ، ء ه = ٤ س − ٥ سم

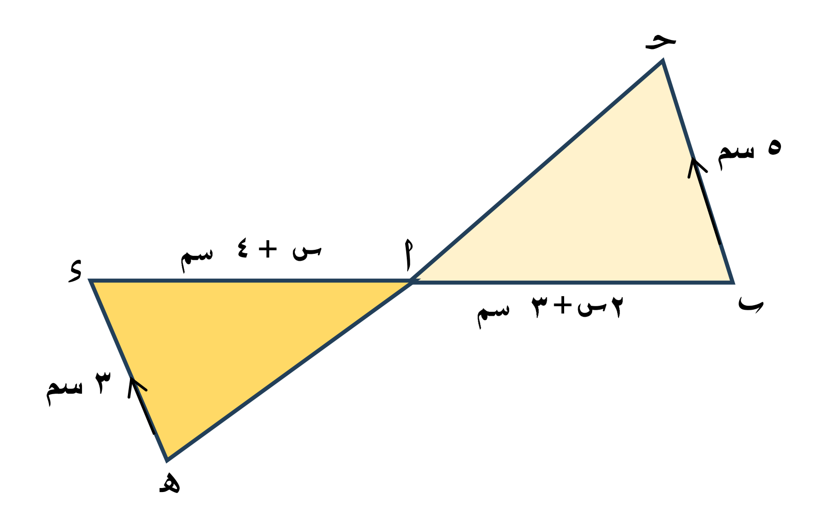
أوجد قيمة س العددية.

∵ ء ه // ب ح ⬅ ∴ Δ أ ب ح ~ Δ أ ء ه

$\frac{أب}{أء} = \frac{بح}{ءه}$ ⬅ $\frac{٦}{٤} = \frac{س + ٥}{٤س − ٥}$

٤ س + ٢٠ = ٢٤ س − ٣٠ ⬅ ٢٠س = ٥٠ ⬅ س = ٢,٥ سم

تدريب (٢): في الشكل المقابل :



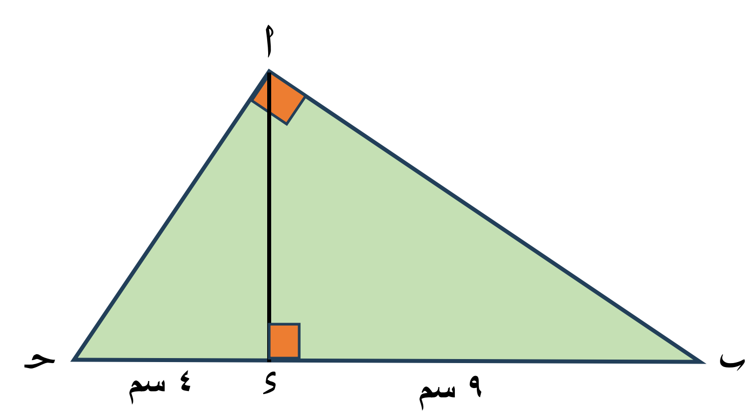
$\overline{هـ ء}$ // $\overline{ب حـ}$ ، أ ء = س + ٤ سم ،

أ ب = ٢س + ٣ سم ،

ب حـ = ٥ سم ، ء هـ = ٣ سم

أوجد قيمة س العددية.

مثال محلول (٣): في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في أ ، $\overline{أ ء}$ ⊥ $\overline{ب حـ}$

ب ء = ٩ سم ، ء حـ = ٤ سم

أوجد طول كل من : $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ حـ}$

الحـــــــــــل

(أ ب)^{٢} = ب ء × ب حـ

(أ ب)^{٢} = ٩ × ١٣ ⬅ أ ب = ٣$\sqrt{١٣}$ س

(أ حـ)^{٢} = حـ ء × حـ ب

(أ حـ)^{٢} = ٤ × ١٣ ⬅ أ ب = ٢$\sqrt{١٣}$ سم

تدريب (٣): أوجد قيمة س العددية في كل من الأشكال الآتية :

شكل (١)

شكل (٢)

شكل (٣)

نظرية (١) : (الحالة الثانية للتشابه)

إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فى مثلثين فإنهما متشابهان.

إذا كان : $\frac{\text{أب}}{\text{ءهـ}} = \frac{\text{بحـ}}{\text{هـو}} = \frac{\text{أحـ}}{\text{ءو}}$

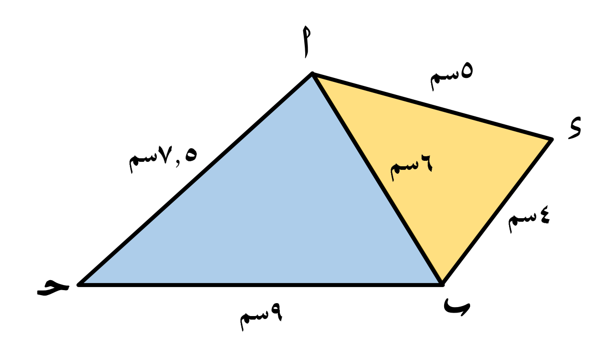
فإن : Δ أبحـ ~ Δ ءهـو

ويكون : ق (∠ أ) = ق (∠ ء) ،

ق (∠ ب) = ق (∠ هـ) ،

ق (∠ حـ) = ق (∠ و)

مثال محلول (٤): في الشكل المقابل :



ب ء = ٤ سم ، أ ء = ٥ سم ،

أ ب = ٦ سم ، أ ح = ٧,٥ سم ،

ب ح = ٩ سم

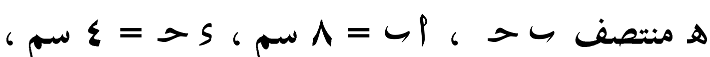
أثبت أن : Δ أ ب ح ~ Δ ب ء أ

الحـــــــــــــل

$$\frac{\text{أب}}{\text{ءب}} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$$

$$\frac{\text{بح}}{\text{أب}} = \frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}$$

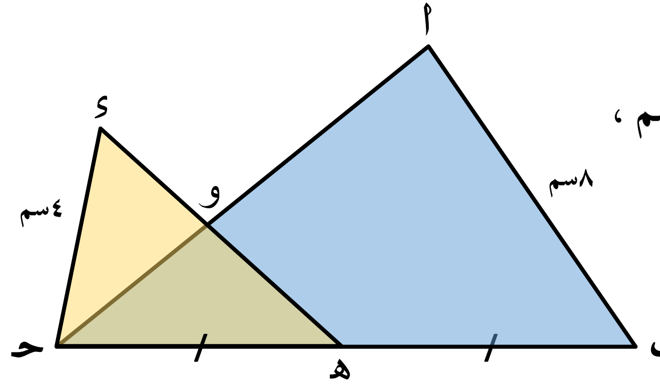
$$\frac{\text{أح}}{\text{أء}} = \frac{٧,٥}{٥} = \frac{٣}{٢}$$



$$\therefore \frac{\text{أب}}{\text{ءب}} = \frac{\text{بح}}{\text{أب}} = \frac{\text{أح}}{\text{أء}}$$

∴ Δ أ ب ح ~ Δ ب ء أ

تدريب (٤): في الشكل المقابل :



هـ منتصف $\overline{\text{ب ح}}$ ، أ ب = ٨ سم ، ء ح = ٤ سم ،

أ ح = ١٠ سم ، ء هـ = ٥ سم

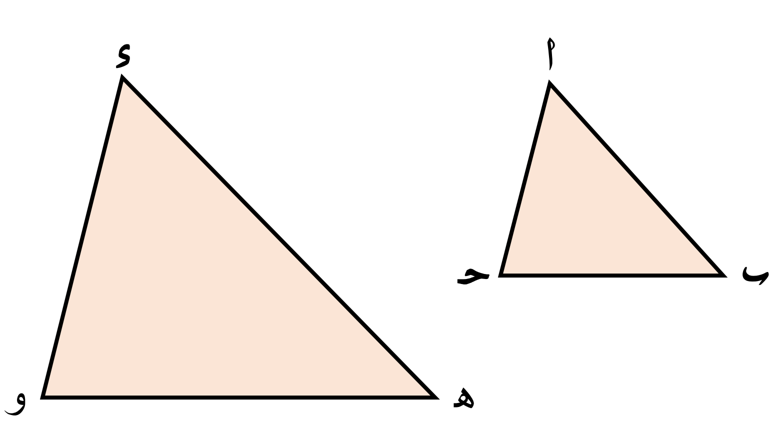
أثبت أن :

(١) Δ أ ب ح ~ Δ ء ح هـ

(٢) Δ و ح هـ متساوى الساقين

نظرية (٢) : (الحالة الثالثة للتشابه)

إذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر وتناسبت أطوال الأضلاع التى تحتويها هاتان الزاويتان كان المثلثان متشابهان.



إذا كان : ق (∠ أ) = ق (∠ ء) ،

$\frac{\text{أب}}{\text{ءهـ}} = \frac{\text{أحـ}}{\text{ءو}}$

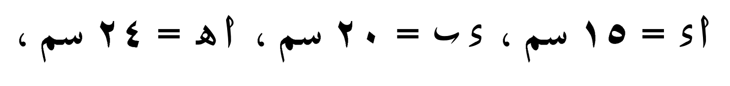
فإن : Δ أ ب حـ ~ Δ ء هـ و

ويكون : ق (∠ ب) = ق (∠ هـ) ،

ق (∠ حـ) = ق (∠ و) ،

$\frac{\text{بحـ}}{\text{هـو}} = \frac{\text{أحـ}}{\text{ءو}}$

مثال محلول (٥): في الشكل المقابل :



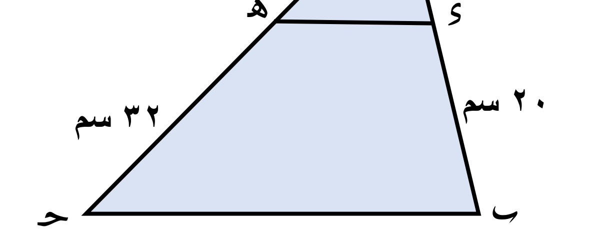
أ ب حـ مثلث ، ء ∈ $\overline{\text{أب}}$ ، هـ ∈ $\overline{\text{أحـ}}$ بحيث :

أء = ١٥ سم ، ء ب = ٢٠ سم ، أ هـ = ٢٤ سم ،

هـ حـ = ٣٢ سم

أثبت أن : (١) Δ أ ء هـ ~ Δ أ ب حـ

(٢) $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{بحـ}}$



الحــــــــــــل

∠ أ مشتركة ⟸ (١)

$\frac{\text{أء}}{\text{أب}} = \frac{١٥}{٣٥} = \frac{٣}{٧}$ ، $\frac{\text{أهـ}}{\text{أحـ}} = \frac{٢٤}{٥٦} = \frac{٣}{٧}$

$\frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ حـ}}$ ⟵ (٢)

∴ Δ أ ء هـ ~ Δ أ ب حـ

∴ ق (∠ أ ء هـ) = ق (∠ ب) وهما في وضع تناظر ⟵ ∴ $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

تدريب (٥): في الشكل المقابل :

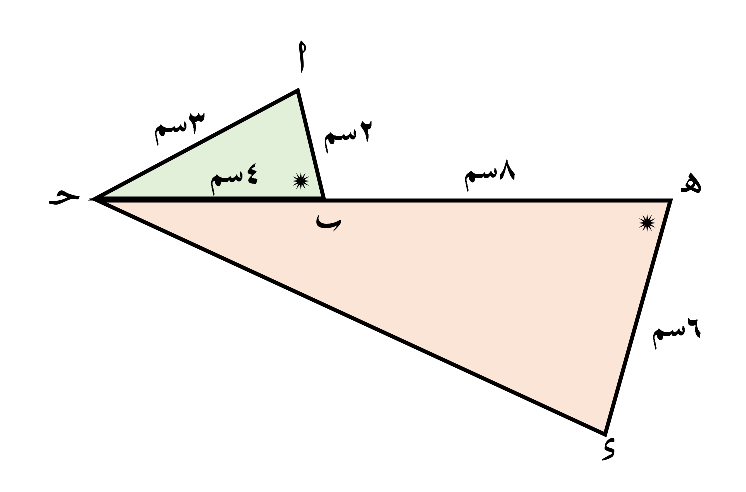
أ ب = ٢ سم ، أ حـ = ٣ سم ،

ب حـ = ٤ سم ، هـ ب = ٨ سم ،

هـ ء = ٦ سم ،

ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ هـ)

أوجد طول : $\overline{\text{ء حـ}}$



حلول التدريبات

تدريب (١): (١) ٤ : ٣ (٢) ٦ سم

تدريب (٢): س = ١١ سم

تدريب (٣): (١) ١٢ سم (٢) ٢ سم (٣) $٣\sqrt{٢}$ سم

تدريب (٥): ٩ سم

تمارين على الدرس الثانى

أولًا : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

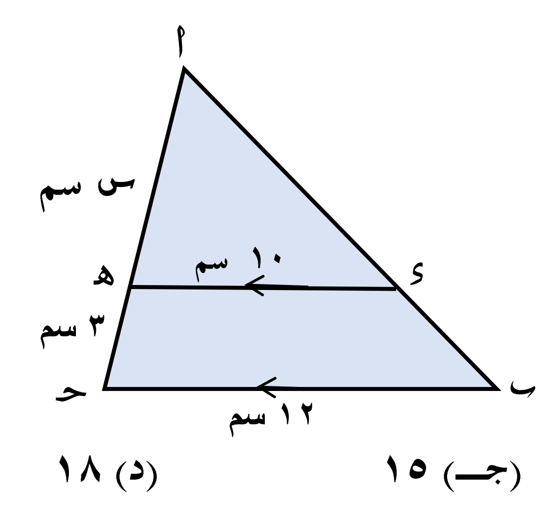
(١) في الشكل المقابل :

إذا كان :

$\overline{ءهـ}$ // $\overline{بجـ}$ ، أهـ = س سم ، هـ جـ = ٣ سم ،

ب جـ = ١٢ سم ، ء هـ = ١٠ سم

فإن : س = ... سم



(أ) ٩ (ب) ١٢ (جـ) ١٥ (د) ١٨

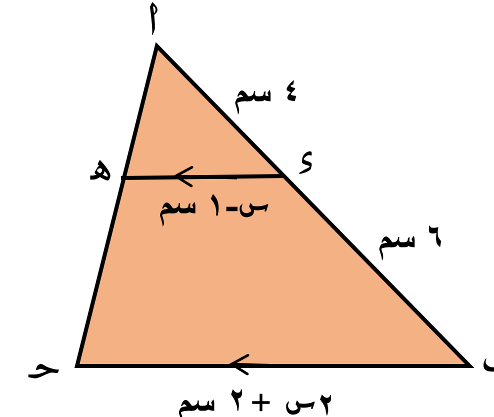
(٢) في الشكل المقابل :

إذا كان :

$\overline{ءهـ}$ // $\overline{بجـ}$ ، أء = ٤ سم ، ء ب = ٦ سم ،

ب جـ = ٢س + ٢ سم ، ء هـ = س − ١ سم

فإن : س = ... سم



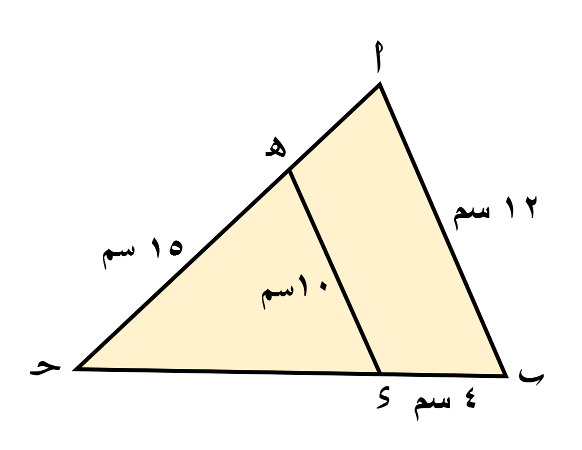
(أ) ٧ (ب) ٩ (جـ) ١١ (د) ١٣

(٣) في الشكل المقابل : إذا كان :

ق (∠ ء هـ جـ) = ق (∠ أ) ، أ ب = ١٢ سم ،

هـ جـ = ١٥ سم ، ب ء = ٤ سم ، ء هـ = ١٠ سم

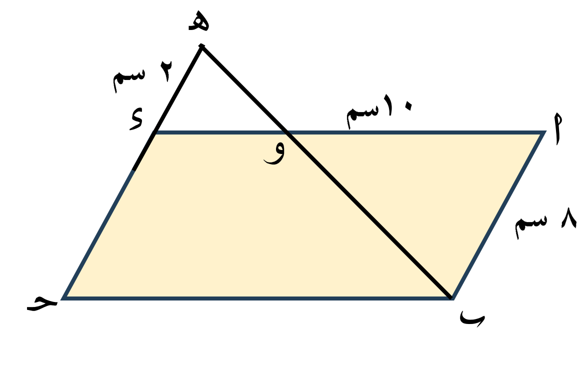
فإن : محيط الشكل أ ب ء هـ = ... سم



(أ) ٣٢ (ب) ٣١

(جـ) ٣٠ (د) ٢٩

(٤) في الشكل المقابل : إذا كان :



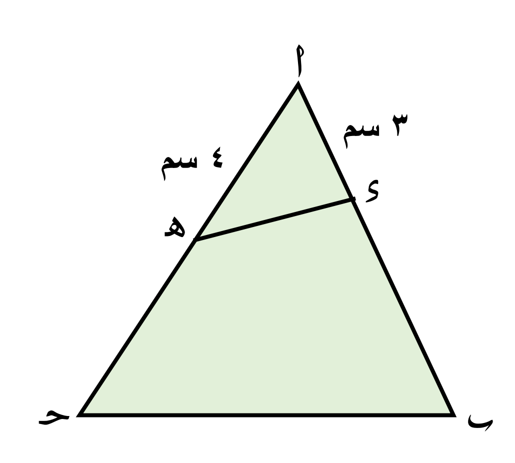
أ ب حـ ء متوازى أضلاع ،

هـ ء = ٢ سم ، أ ب = ٨ سم ، أ و = ١٠ سم

فإن : محيط متوازى الأضلاع = ... سم

(أ) ٤٠ (ب) ٤١ (جـ) ٤٢ (د) ٤٣

(٥) في الشكل المقابل : إذا كان :



ق (∠ أ ء هـ) = ق (∠ حـ) ، أ ء = ٣ سم ،

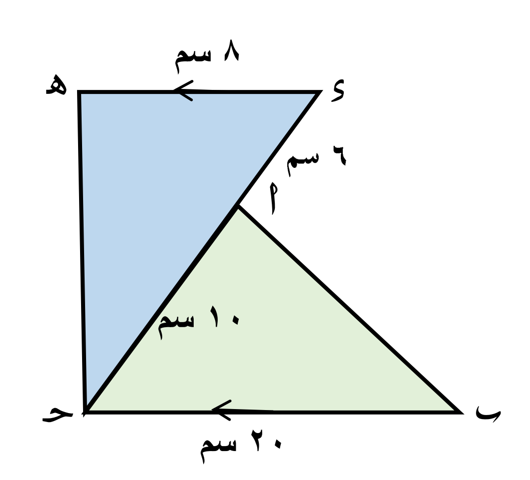
أ هـ = ٤ سم ، هـ حـ = ٥ سم

فإن : ب ء = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ١٠

(جـ) ٩ (د) ٨

(٦) في الشكل المقابل : إذا كان :



ء هـ // ب حـ ، أ حـ = ١٠ سم ،

أ ء = ٦ سم ، ء هـ = ٨ سم ، ب حـ = ٢٠ سم

فإن : $\frac{\text{هـ حـ}}{\text{أ ب}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٣}{٥}$

(جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

(٧) في الشكل المقابل : إذا كان :

Δ أ ب حـ قائم الزاوية في ب ، ب ء ⊥ أ حـ

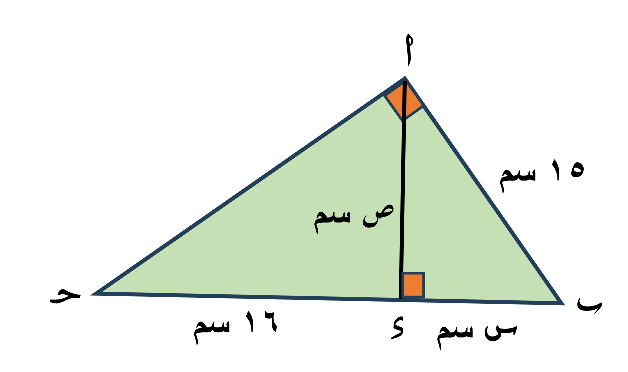
أ ء = ٣ سم ، ء حـ = س + ٤ سم ،

ب ء = ٦ سم

فإن : س = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ١٠ (جـ) ٨ (د) ٥

(٨) في الشكل المقابل : إذا كان :



Δ أ ب حـ قائم الزاوية في أ ، أ ء ⊥ ب حـ

أ ء = ص سم ، ء حـ = ١٦ سم ،

ب ء = س سم ، أ ب = ١٥ سم

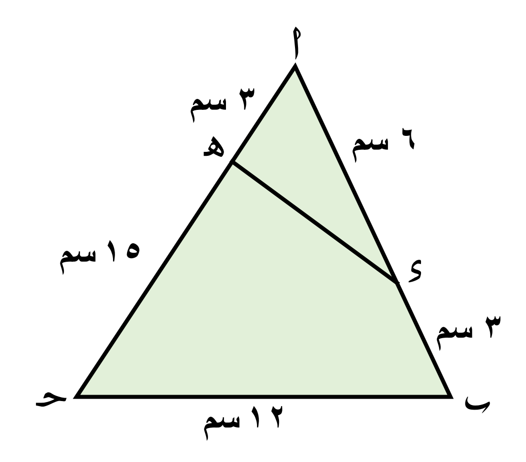
فإن : س + ص = ... سم

(أ) ٢٥ (ب) ٢٤

(جـ) ٢١ (د) ٢٠

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

(٩) في الشكل المقابل :



Δ أ ب حـ فيه : ء ∈ أ ب ، هـ ∈ أ حـ

أ ء = ٦ سم ، ء ب = أ هـ = ٣ سم ،

ب حـ = ١٢ سم ، هـ حـ = ١٥ سم

أولًا : أثبت أن Δ أ هـ ء ~ Δ أ ب حـ

ثانياً : أوجد طول ء هـ

(١٠) في الشكل المقابل :

$\overline{أ ء} \cap \overline{ب ح} = \{هـ\}$ ،

أ هـ = ٧,٥ سم ، هـ ح = أ ب = ٦ سم ،

ب هـ = ٤,٥ سم ، هـ ء = ١٠ سم

احسب طول $\overline{ء ح}$

حلول تمارين على الدرس الثانى

(١) ١٥ سم

(٢) ٩ سم

(٣) ٢٩ سم

(٤) ٤١ سم

(٥) ٩ سم

(٦) $\frac{٤}{٥}$

(٧) ٨ سم

(٨) ٢١

(٩) ٤ سم

(١٠) ٨ سم

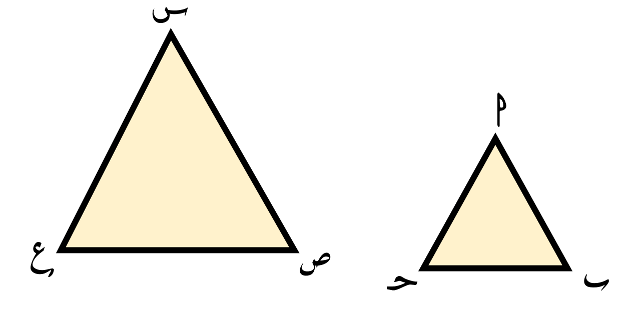
الوحدة الثانية : التشابه

الدرس الثالث: العلاقة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين

أولًا : النسبة بين مساحتي سطحى مثلثين متشابهين :

نظرية (٣)

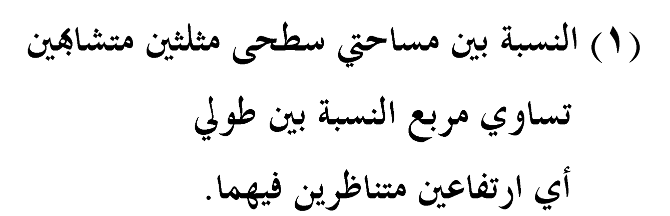
النسبة بين مساحتي سطحى مثلثين متشابهين
تساوي مربع النسبة بين طولي
أي ضلعين متناظرين فيهما.



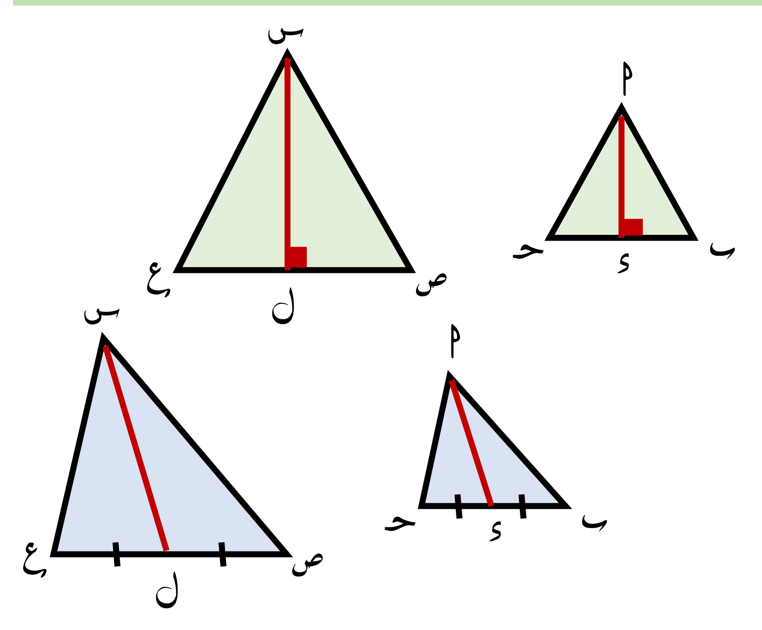
إذا كان : Δ ا ب حـ ~ Δ س ص ع ⇦

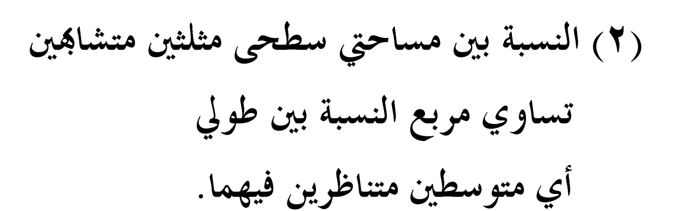
$$\frac{م\ (\Delta\ ا ب حـ)}{م\ (\Delta\ س ص ع)} = \left(\frac{ا ب}{س ص}\right)^{٢} = \left(\frac{ب حـ}{ص ع}\right)^{٢} = \left(\frac{ا حـ}{س ع}\right)^{٢}$$

ملاحظات :

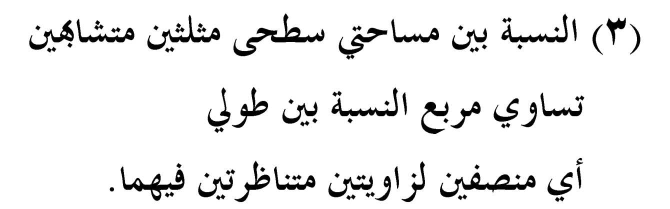


(١) النسبة بين مساحتي سطحى مثلثين متشابهين
تساوي مربع النسبة بين طولي
أي ارتفاعين متناظرين فيهما.

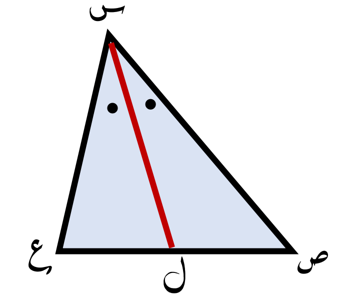


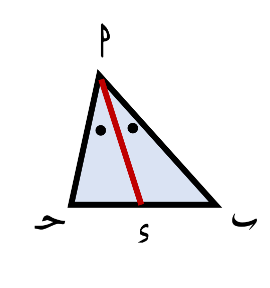


(٢) النسبة بين مساحتي سطحى مثلثين متشابهين
تساوي مربع النسبة بين طولي
أي متوسطين متناظرين فيهما.



(٣) النسبة بين مساحتي سطحى مثلثين متشابهين
تساوي مربع النسبة بين طولي
أي منصفين لزاويتين متناظرتين فيهما.

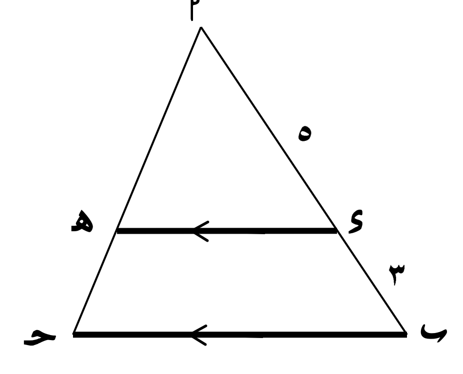




أي أن :

$$\frac{م\ (\Delta\ ا ب حـ)}{م\ (\Delta\ س ص ع)} = \left(\frac{ا ء}{س ل}\right)^{٢}$$

مثال محلول (١):



في الشكل المقابل : إذا كان : $\overline{ءهـ} \parallel \overline{بحـ}$ ،

أ ء : ء ب = ٥ : ٣ ، مساحة المثلث أ ب حـ = ٢٥,٦ سم^2

فإن : مساحة المثلث أ ء هـ = ... سم^2

(أ) ١٠ (ب) ١٦

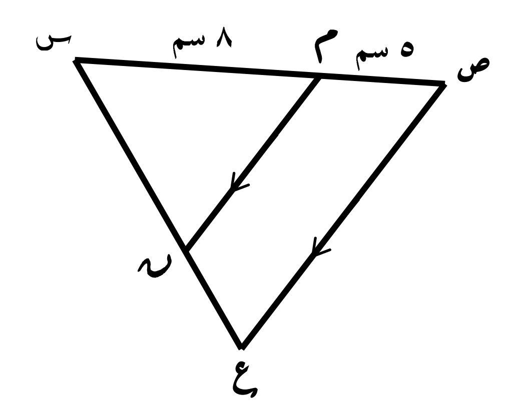
(حـ) ٤١ (ء) ٦٥,٥

الحــــــــــل

$$\frac{م(\Delta\ أ ب حـ)}{م(\Delta\ أ ء هـ)} = \left(\frac{٨}{٥}\right)^2 = \frac{٦٤}{٢٥}$$

$$\frac{٢٥,٦}{م(\Delta\ أ ء هـ)} = \frac{٦٤}{٢٥}$$ ⟸ مساحة Δ أ ء هـ = ١٠ سم^2

تدريب (١):



في الشكل المقابل : إذا كان : $\overline{من} \parallel \overline{صع}$ ،

س م = ٨ سم ، م ص = ٥ سم ،

مساحة المثلث س ص ع = ١٣٠ سم^2

فإن : مساحة المثلث س م ن = ... سم^2

(أ) ٥٠ (ب) ٦٠

(حـ) ٧٠ (ء) ٨٠

مثال محلول (٢): أكمل :

إذا كانت النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهان تساوى ٩ : ٢٥

فإن النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما تساوى ...... : ......

الحــــــــــل

النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما = ٣ : ٥

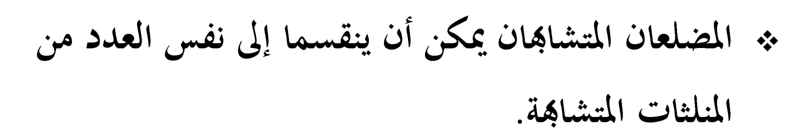
تدريب (٢):

إذا كانت النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهان تساوى ٨١ : ٤٩

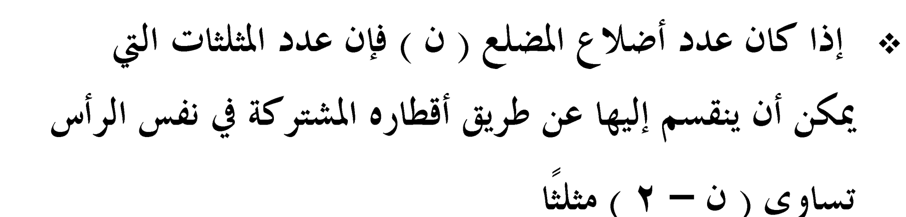
فإن النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما تساوى ...... : ......

ثانيًا : النسبة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين :

حقيقة



- المضلعان المتشابهان يمكن أن ينقسما إلى نفس العدد من المثلثات المتشابهة.
- إذا كان عدد أضلاع المضلع (ن) فإن عدد المثلثات التي يمكن أن ينقسم إليها عن طريق أقطاره المشتركة في نفس الرأس تساوى (ن – ٢) مثلثًا



نظرية (٤)

النسبة بين مساحتى مضلعين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما.

ملاحظة :

النسبة بين محيطى مضلعين متشابهين تساوى النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما.

مثال محلول (٣): مضلعان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ١ : ٢

فما النسبة بين مساحتيهما ؟ وما النسبة بين محيطيهما ؟

الحـــــــــــل

$$\frac{\text{مساحة المضلع الأول}}{\text{مساحة المضلع الثانى}} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} = \frac{١}{٤} \quad ، \quad \frac{\text{محيط المضلع الأول}}{\text{محيط المضلع الثانى}} = \frac{١}{٢}$$

تدريب (٣): مضلعان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ٣ : ٢

فإن النسبة بين مساحتيهما ...... : ......

مثال محلول (٤): إذا كانت النسبة بين مساحتي مضلعين متشابهين ٤ : ٩

فإن النسبة بين محيطيهما = ...

الحـــــــــــل

النسبة بين محيطيهما = ٢ : ٣

تدريب (٤): إذا كانت النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين ٦٤ : ١٢١

فإن النسبة بين محيطيهما = ...

مثال محلول (٥): مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٢ : ٣ فإذا كانت : مساحة المضلع الأصغر = ١٠٠ سم^{٢} فأوجد مساحة المضلع الأكبر.

الحـــــــــــل

$$\frac{\text{مساحة المضلع الأصغر}}{\text{مساحة المضلع الأكبر}} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢} = \frac{٤}{٩}$$

$$\frac{١٠٠}{\text{مساحة المضلع الأكبر}} = \frac{٤}{٩}$$ ⟸ مساحة المضلع الأكبر = ٢٢٥ سم^{٢}

تدريب (٤):

(أ) مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٢ : ٣ فإذا كانت مساحة سطح المضلع الأول = ٦٠ سم^{٢}

فإن : مساحة سطح المضلع الثاني = ... سم^{٢}

(ب) مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٢ : ٣ فإذا كان مجموع مساحتيهما ١٤٣ سم^{٢} أوجد مساحة كل منهما.

حلول التدريبات

(١) ٣ : ٥

(٢) ٩ : ٤

(٣) ١٣٥ سم^٢

(٤) ٤٤ سم^٢ ، ٩٩ سم^٢

وزارة التربية والتعليم
الإدارة المركزية لتطوير المناهج
مكتب مستشار الرياضيات

تمارين على الدرس الثالث

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٤ : ٩ فتكون النسبة بين مساحتيهما ...... : ......

(أ) ٤ : ٩ (ب) ٩ : ٤ (جـ) ٢ : ٣ (د) ١٦ : ٨١

(٢) إذا كان طولا ضلعين متناظرين في مضلعين متشابهين ٧ سم ، ١١ سم فإن النسبة بين محيطيهما ......

(أ) ٤٩ : ١٢١ (ب) ٧ : ١٨ (جـ) ٧ : ١١ (د) ١١ : ١٨

(٣) مثلثان متشابهان النسبة بين طولى أي ضلعين متناظرين فيهما ٢ : ٥ فإذا كانت مساحة الأول ١٦ سم^2

فإن مساحة الثانى = ... سم^2

(أ) ٤٠ (ب) ٨٠ (جـ) ١٠٠ (د) ١٢٠

(٤) مربعان النسبة بين طولى قطريهما ٢ : ٥ فإذا كانت مساحة أصغرهما ٤ سم^2

فإن : مساحة أكبرهما ...... سم^2

(أ) ٢٥ (ب) ١٦ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

(٥) مضلعان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ٣ : ٤ ومجموع مساحتيهما ١٥٠ سم^2 فإن :

مساحة المضلع الأصغر ...... سم^2

(أ) ٥٤ (ب) ٩٦ (جـ) ٧٥ (د) ٥٢

(٦) في الشكل المقابل :

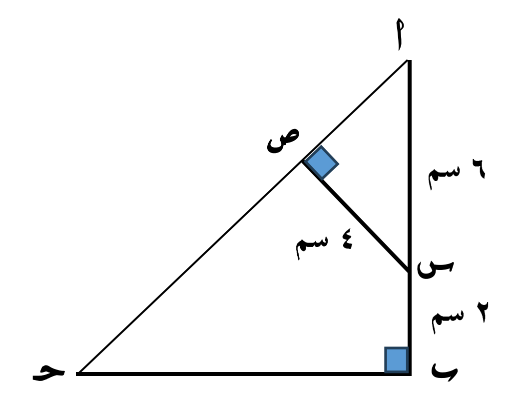
$\overline{ءهـ}$ // $\overline{بحـ}$ ، مساحة Δ أءهـ = ٨ سم^2

فإن : مساحة الشكل ءبحـهـ = ... سم^2

(أ) ٢٧ (ب) ٦٤

(جـ) ٢٤ (د) ١٦

(٧) في الشكل المقابل :



$\frac{م\ (\Delta\ أ ص س)}{م\ (\Delta\ أ ب حـ)}$ = ...

(أ) ٣ : ٥ (ب) ٥ : ١٦

(جـ) ٩ : ٢٥ (د) ٤ : ٥

(٨) مضلعان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ٥ : ٣ والفرق بين مساحتيهما ٣٢ سم^2 فإن :

مساحة المضلع الأصغر تساوى ...... سم^2

(أ) ١٨ (ب) ٩ (جـ) ٢٥ (د) ١٦

(٩) دائرتان النسبة بين طولى قطريهما ٣ : ٥ فإذا كانت مساحة الدائرة الصغرى ٢٧ سم^2 فإن : مساحة

الدائرة الكبرى تساوى ...... سم^2

(أ) ٤٥ (ب) ٥٠ (جـ) ٧٥ (د) ١٠٠

(١٠) إذا كان : Δ أ ب حـ ~ Δ س ص ع ، مساحة Δ أ ب حـ = ٩ مساحة Δ س ص ع ، وكان :

س ص = ٤ سم فإن : أ ب = ... سم

(أ) ٥ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ٣٦

حلول تمارين على الدرس الثالث

(١) ١٦ : ٨١ **(٦) ٦٤**

(٢) ٧ : ١١ **(٧) ٥ : ١٦**

(٣) ١٠٠ **(٨) ١٨**

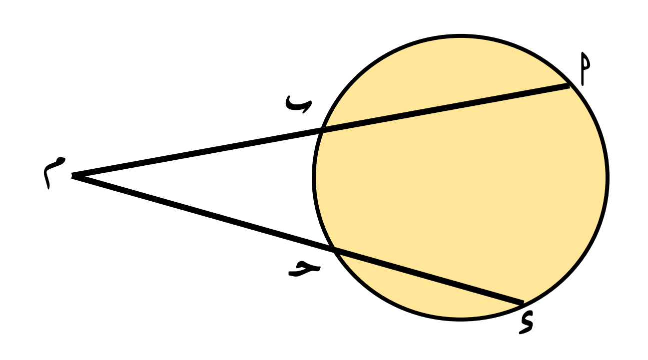
(٤) ٢٥ **(٩) ٧٥**

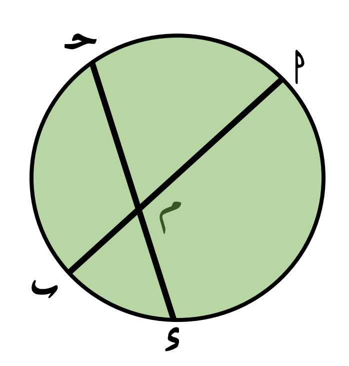
(٥) ٥٤ **(١٠) ١٢**

الدرس الرابع: تطبيقات التشابه في الدائرة

تمرين مشهور: إذا تقاطع المستقيمان الحاملان للوترين : $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{حـ ء}}$ لدائرة في نقطة م فإن :

م أ × م ب = م ء × م حـ

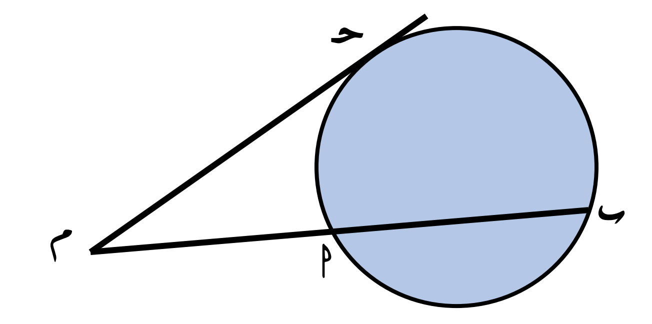




نتيجة (١) :

إذا كان : $\overleftarrow{\text{م حـ}}$ مماس للدائرة عند حـ

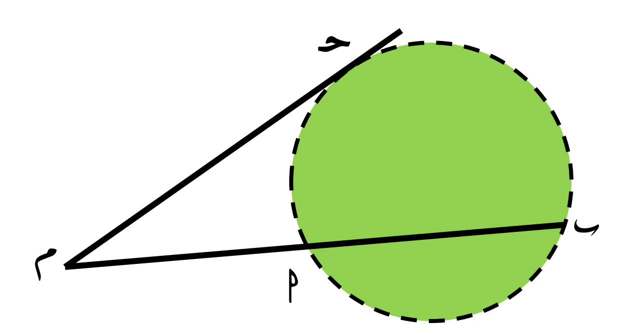
فإن : $(\text{م حـ})^2$ = م أ × م ب

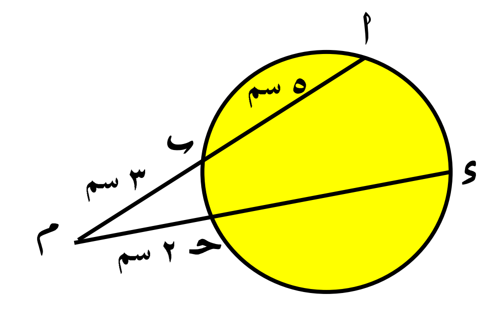


نتيجة (٢) :

إذا كان : $(\text{م حـ})^2$ = م أ × م ب

فإن : $\overleftarrow{\text{م حـ}}$ مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، حـ





مثال محلول (١):

أكمل مايأتي : $\overleftarrow{\text{أب}} \cap \overleftarrow{\text{ءحـ}}$ = { م }

، م ب = ٣ سم ، أ ب = ٥ سم

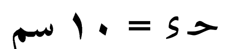
، م حـ = ٢ سم

فإن : حـ ء = ... سم

الحـــــــــــــــل

م أ × م ب = م ء × م حـ

٨ × ٣ = ٢ × م ء ⟸ م ء = ١٢ سم ⟸ حـ ء = ١٠ سم



تدريب (١):

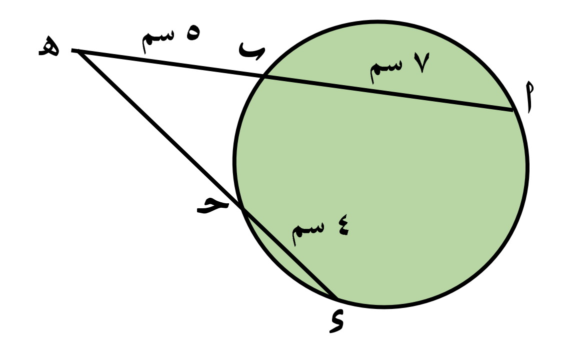
في الشكل المقابل :

أ ب = ٧ سم ، ب هـ = ٥ سم ،

ء حـ = ٤ سم فإن : حـ هـ = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤

(جـ) ٥ (د) ٦



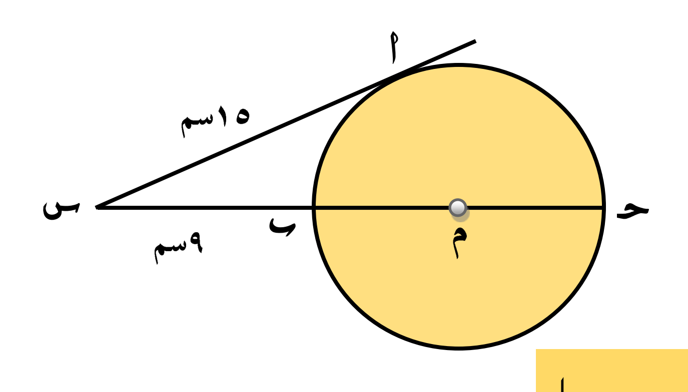
مثال محلول (٢):

$\overleftarrow{\text{س أ}}$ مماس للدائرة م في أ

حيث : س أ = ١٥ سم

فإذا كان : س ب = ٩ سم فاحسب طول نصف

قطر الدائرة م.



الحـــــــــــــــل

(س أ)^{٢} = س ب × س حـ

٢٢٥ = ٩ × س حـ ← س حـ = ٢٥ سم ← نق = ١٢,٥ سم

تدريب (٢):

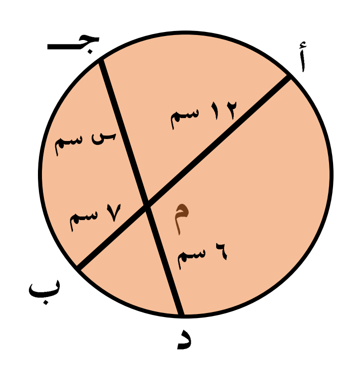
في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{\text{أ ب}}$ قطعة مماسة للدائرة م

فإن : مساحة الدائرة = ... سم^{٢}

(أ) ٤,٥ π (ب) ٩ π (جـ) ٨١ π (د) ٢٠,٢٥ π

مثال محلول (٣):



في الشكل المقابل : س = ... سم

(أ) ٣.٥ (ب) ١٤

(جـ) ٦ (د) ١٢

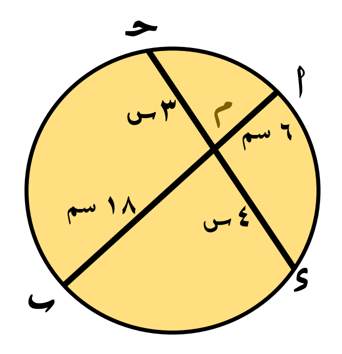
الحـــــــــل

م أ × م ب = م حـ × م ء

١٢ × ٧ = س × ٦

س = ١٤ سم

مثال محلول (٤):



في الشكل المقابل : $\overline{\text{أ ب}}$ ∩ $\overline{\text{حـ ء}}$ = { م }

حـ ء = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٩

(جـ) ١٨ (د) ٢١

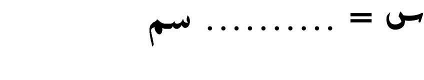
الحـــــــــــــل

م جـ × م د = م أ × م ب

٣س × ٤س = ٦ × ١٨ ← ١٢س^{2} = ١٠٨

س^{2} = ٩ ← س = ٣ ← حـ ء = ٢١ سم

تدريب (٣): في الشكل المقابل :

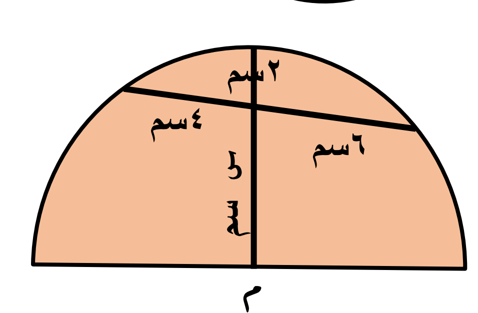


س = ... سم

أ) ٦	ب) ١٢
جـ) ١٨	د) ٣٦

مثال محلول (٤): في الشكل المقابل : إذا كان م مركز نصف الدائرة

فإن : محيط الدائرة = ... سم



أ) ١٠ π	ب) ١٤ π
جـ) ٧ π	د) ٢١ π

الحـــــــــــــل

٢ (س + س + ٢) = ٤ × ٦

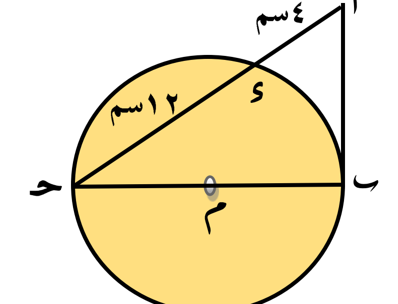
٢س + ٢ = ١٢ ← س = ٥ سم ← محيط الدائرة = ١٤ π سم

تدريب (٤):

في الشكل المقابل :

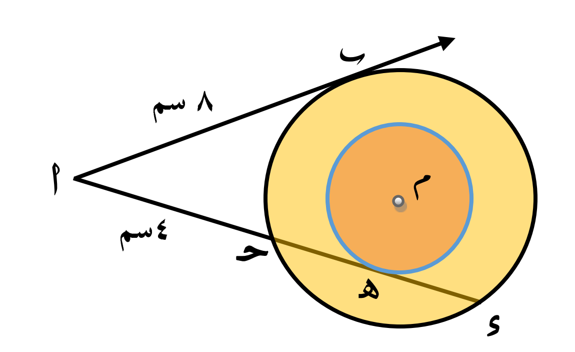
$\overline{\text{أ ب}}$ قطعة مماسة للدائرة م ، أ ء = ٤ سم ، ء حـ = ١٢ سم ،

فإن : محيط الدائرة = ... سم



أ) ٤ $\sqrt{3}$ π	ب) ٨ $\sqrt{3}$ π	جـ) ١٦ $\sqrt{3}$ π	د) ٢٠ $\sqrt{3}$ π

مثال محلول (٥): في الشكل المقابل :



$\overleftarrow{\text{أب}}$ مماس للدائرة الكبرى ، $\overleftarrow{\text{أء}}$ مماس للدائرة الصغرى

فإن : ء هـ = ... سم

(أ) ٤   (ب) ٥

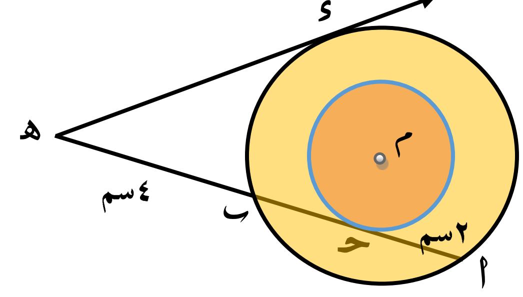
(جـ) ٦   (د) ٨

الحـــــــــــــل

(أ ب)^{٢} = أ حـ × أ ء

٦٤ = ٤ × أ ء أ ء = ١٦ سم ء هـ = ٨ سم

تدريب (٥):

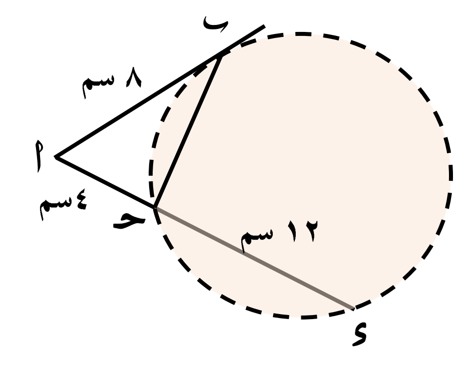


$\overleftarrow{\text{هـ ء}}$ مماس للدائرة الكبرى ، $\overline{\text{هـ أ}}$ مماس للدائرة الصغرى

فإن : ء هـ = ... سم

(أ) ٤$\sqrt{٢}$ (ب) ٢$\sqrt{٢}$ (جـ) ٣$\sqrt{٢}$ (د) ٥$\sqrt{٢}$

مثال محلول (٦): في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث فيه أ ب = ٨ سم ، أ حـ = ٤ سم ،

ء ∈ $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ ، ء ∉ $\overline{\text{أ حـ}}$ حيث حـ ء = ١٢ سم

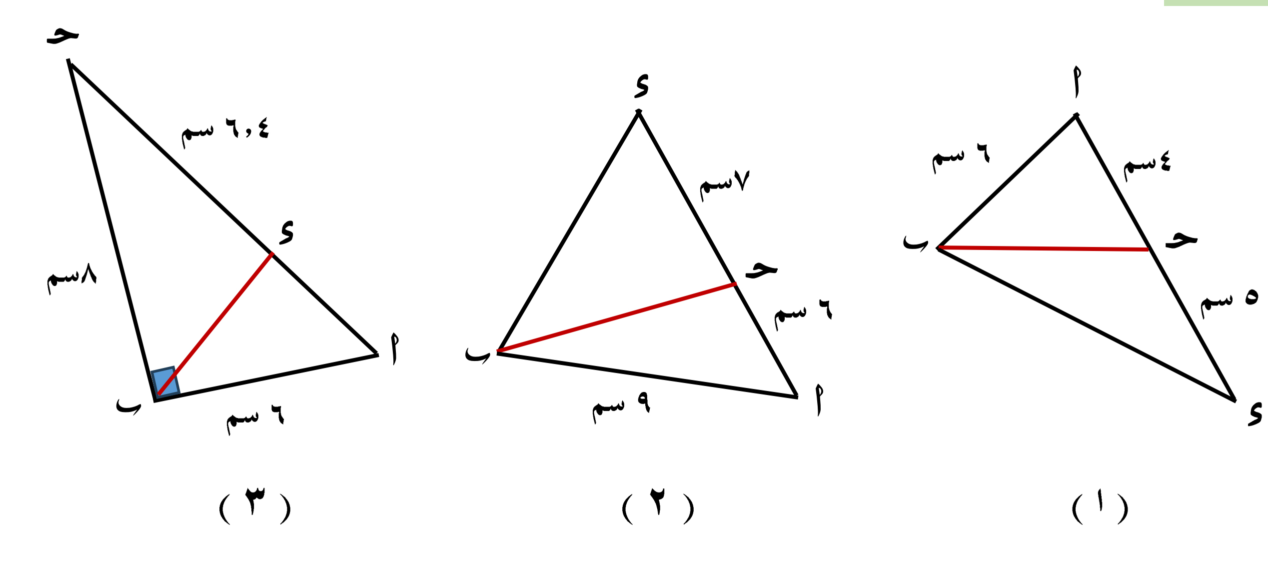
أثبت أن : $\overline{\text{أ ب}}$ تمس الدائرة المارة بالنقط ب ، حـ ، ء

الحـــــــــــــل

(أ ب)^{٢} = ٦٤   ،   أ حـ × أ ء = ٤ × ١٦ = ٦٤

(أ ب)^{٢} = أ حـ × أ ء   ∴ $\overline{\text{أ ب}}$ تمس الدائرة المارة بالنقط ب ، حـ ، ء

تدريب (٦): في أي الأشكال الآتية يكون $\overline{\text{أب}}$ قطعة مماسة للدائرة المارة بالنقط حـ ، ء ، ب



حل تدريب (١): ٦

حل تدريب (٢): ٢٠,٢٥ π

حل تدريب (٣): ٦

حل تدريب (٤): ٨ $\sqrt{٣}$ π

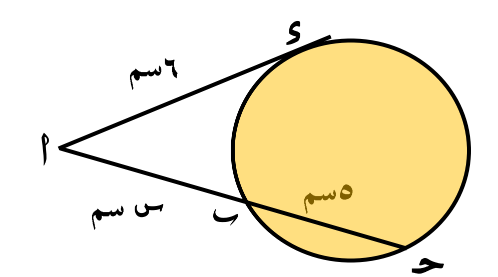
حل تدريب (٥): ٤ $\sqrt{٢}$

حل تدريب (٦): (١) ، (٣)

تمارين على الدرس الرابع

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) في الشكل المقابل :



إذا كان : $\overline{\text{أء}}$ قطعة مماسة للدائرة ، أء = ٦ سم ،

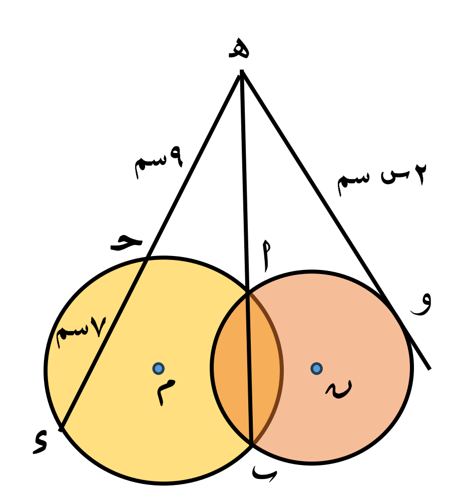
أب = س سم ، ب حـ = ٥ سم

فإن : س = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣

(جـ) ٤ (د) ٥

(٢) في الشكل المقابل :



$\overleftarrow{\text{هـ و}}$ مماس للدائرة ن عند و ، هـ و = ٢س سم ،

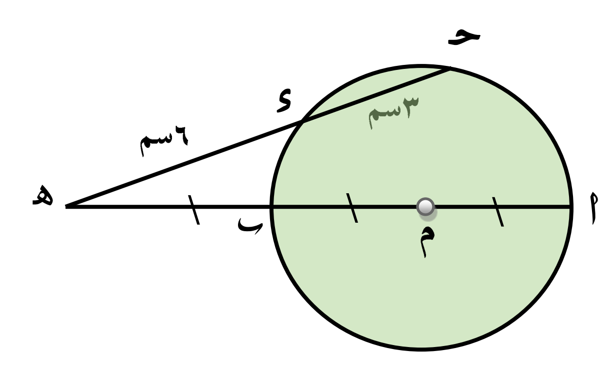
هـ حـ = ٩ سم ، حـ ء = ٧ سم

فإن : س = ... سم

(أ) ٨ (ب) $٢\sqrt{٧}$

(جـ) $٣\sqrt{٧}$ (د) ٦

(٣) في الشكل المقابل :



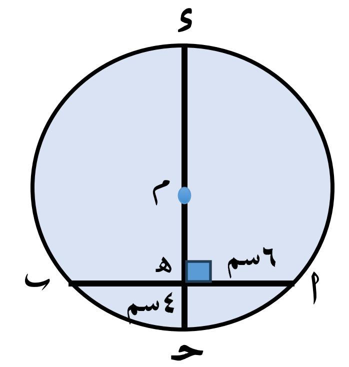
$\overline{\text{أب}}$ قطر في الدائرة م ،

أم = م ب = ب هـ ، حـ ء = ٣ سم ، ء هـ = ٦ سم

فإن : مساحة الدائرة = ... سم^٢

(أ) ٦ π (ب) ٩ π

(جـ) ١٢ π (د) ١٨ π



(٤) في الشكل المقابل :

$\overline{\text{حـ ء}}$ قطر في الدائرة م ، $\overline{\text{حـ ء}} \cap \overline{\text{أ ب}}$ = {هـ} ،

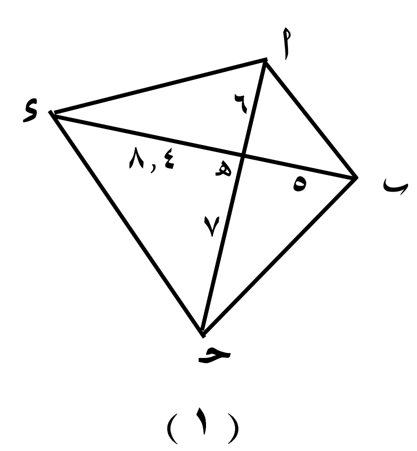
$\overline{\text{حـ ء}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ، أهـ = ٦ سم ، حـهـ = ٤ سم

فإن : طول نصف قطر الدائرة = ... سم

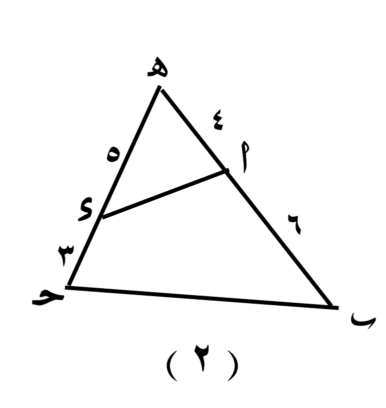
(أ) ٦,٥ (ب) ٧,٥ (جـ) ٨ (د) ١٠

(٥) في أي من الأشكال الآتية تقع النقط أ ، ب ، حـ ، ء على دائرة واحدة

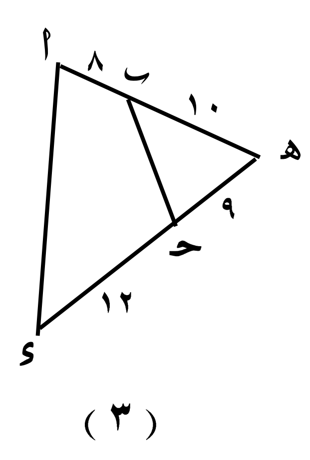
(الأطوال مقدرة بالمتر)



(١)



(٢)



(٣)

حلول تمارين على الدرس الرابع

(١) ٤

(٢) ٦

(٣) ١٨ π

(٤) ٦,٥

(٥) ١ ، ٢

تمارين عامة على الوحدة الثانية

(١) مضلعان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ٣ : ٤ فإذا كان محيط الأصغر = ١٥ سم

فإن محيط المضلع الأكبر = ... سم

(أ) ٢٠ (ب) $\frac{٨٠}{٣}$ (جـ) ٢٧ (د) $\frac{٤٥}{٤}$

(٢) في الشكل المقابل : إذا كان :

Δ أ حـ ب ~ Δ أ ء هـ ، ق (∠ ب) = (٣س + ١٠)° ،

ق (∠ أ هـ ء) = (س + ٣٠)°

فإن : ق (∠ أ) = ... °

(أ) ٦٠ (ب) ٥٠

(جـ) ٤٠ (د) ٣٠

(٣) في الشكل المقابل : إذا كان :

المستطيل أ ب حـ ء ~ المستطيل س ب ص ل ،

أ ء = ١٢ سم ، حـ ء = ٦ سم ،

س ب = ٢ سم

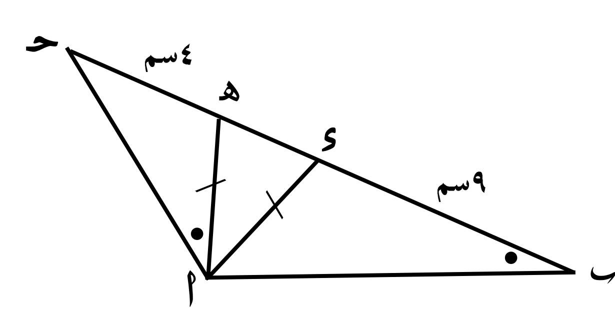
فإن : ص حـ = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ١١

(٤) في الشكل المقابل : إذا كان : أ ء = أ هـ ،

حـ هـ = ٤ سم ، ب ء = ٩ سم ،

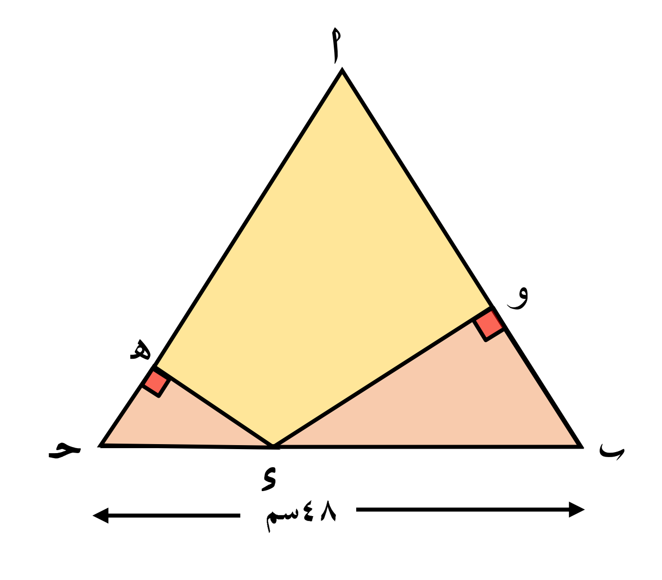
ق (∠ هـ أ حـ) = ق (∠ ب) فإن : أ ء = ... سم



(أ) ٦ (ب) ٨

(جـ) ٩ (د) ١٠

(٥) في الشكل المقابل : إذا كان :



Δ أبحـ فيه : أب = أحـ ،

بحـ = ٤٨ سم ، $\frac{\text{ءهـ}}{\text{ءو}} = \frac{٥}{٧}$

فإن : ءحـ = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ٢٠

(جـ) ٢٤ (د) ٢٨

(٦) في الشكل المقابل : إذا كان :

Δ أبحـ ~ Δ ءهـو ،

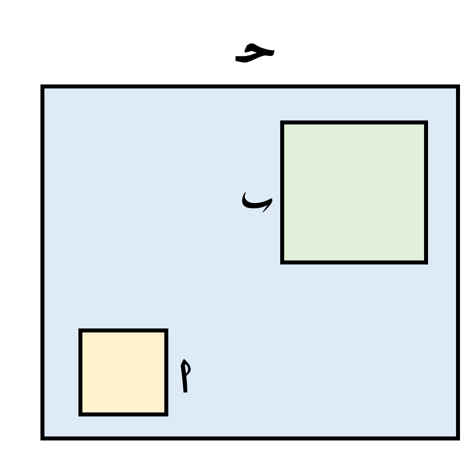
ق (∠ ب) = (٢س)° ،

ق (∠ أ) = (٣س)° ، ق (∠ حـ) = (س)° ،

ءهـ = ٣ سم ، بحـ = ١٨ سم ، فإن : وهـ = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(٧) في الشكل المقابل :



ثلاث مربعات أطوال أضلاع كل منها أ ، ب ، حـ

إذا كان : أ : ب = ١ : ٢ ، ب : حـ = ٣ : ٨ ،

طول ضلع المربع الأكبر = ٣٢ سم

فإن : محيط المربع الأصغر = ... سم

(أ) ٦ (ب) ١٢

(جـ) ٣٦ (د) ٤٨

(٨) إذا كان معامل تشابه المضلع $م_١$ بالنسبة للمضلع $م_٢$ = ٦ : ٥ ، معامل تشابه المضلع $م_٢$ بالنسبة للمضلع $م_٣$ = ٥ : ٩ فإن : معامل تشابه المضلع $م_٣$: للمضلع $م_١$ = ...

(أ) ٢ : ٣ (ب) ٣ : ٢ (جـ) ٥٤ : ٢٥ (د) ٢٥ : ٥٤

(٩) إذا كان المضلع أ ب حـ ء هـ ~ المضلع س ص ع ل هـ ، وكان أ ب : س ص = ٧ : ٩ ، وكان المضلع أ ب حـ ء هـ منتظم فإن : ع ل : ل هـ = ...

(أ) ٧ : ٩ (ب) ٩ : ٧ (جـ) ١ (د) ٢

(١٠) مثلثان متساويا الأضلاع طول ضلع الأول = ٧ سم ، ومحيط المثلث الثانى = ١٥ سم فإن : النسبة بين مساحتى المثلثين = ...

(أ) ٧ : ٥ (ب) ٤٩ : ٢٥ (جـ) ٧ : ١٥ (د) ٤٩ : ٢٢٥

(١١) في الشكل المقابل : إذا كان :

أ ء = س سم ، هـ ء = ٣س سم ،

حـ ب = ٥ سم ، أ ب = ٤ سم

فإن : س = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(١٢) المثلث الذى يحتوى على زاويتان قياساهما ٣٥° ، ٧٠° يشابه مثلث آخر قياسا زاويتين فيه ٧٠° ، ......

(أ) ١٠٥° (ب) ٧٠° (جـ) ٧٥° (د) ٤٠°

(١٣) في الشكل المقابل : إذا كان :

$\overleftarrow{أ ء}$ مماس للدائرة ، أد = $٣\sqrt{٢}$ سم ، أ حـ = حـ ب

فإن : أ ب = ... سم

(أ) ١٨ (ب) ٩ (جـ) ٦ (د) ٣

(١٤) مربعان محيط الأول = ١٦ سم ، وطول قطر المربع الثانى = ٦$\sqrt{٢}$ سم فإن النسبة بين طول ضلع المربع الأول إلى طول ضلع المربع الثانى = ...

(أ) ٨ : ٣$\sqrt{٢}$ (ب) ٤ : ٣$\sqrt{٢}$ (جـ) ٤ : ٣ (د) ٢ : ٣

(١٥) في الشكل المقابل : إذا كان :

ق (∠ ب أ حـ) = ق (∠ أ ء ب) = ٩٠° ،

أ ء = ٦ سم ، ب ء = س سم ،

حـ ء = (٢س + ١) سم

فإن : س = ... سم

(أ) ٤,٥ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٣٦

(١٦) في الشكل المقابل : إذا كان :

$\overline{أ ب}$ ∩ $\overline{حـ ء}$ = { هـ } ،

أ هـ = ص سم ، حـ هـ = س سم ، هـ ء = ٦ سم ،

ب هـ = ٨ سم ، فإن : س : ص = ...

(أ) ١ : ٢ (ب) ٢ : ٣ (جـ) ٣ : ٤ (د) ٤ : ٣

(١٧) رجل طوله ١,٨ متر يقف أمام عمود طوله ٢ متر فإذا كان طول ظل الرجل = ٢,٧ متر

فإن : طول ظل العمود = ... متر (نتيجة لسقوط أشعة الشمس على العمود والرجل)

(أ) ٣,٢ (ب) ٣,٤ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٨) إذا أردنا إنشاء مضلع (س) مساحته تساوى أربعة أمثال مساحة المضلع (ص) فتكون نسبة التشابه بين طول ضلع المضلع (س) : طول ضلع المضلع (ص) = ...

(أ) ٤ : ١ (ب) ١ : ٤ (جـ) ١ : ٢ (د) ٢ : ١

(١٩) في الشكل المقابل : إذا كان :

$\overline{أب} \perp \overline{هـ حـ}$ ، ق ($\measuredangle$ هـ) = ق ($\measuredangle$ حـ) ،

أ ء = ٤ سم ، حـ ب = ٢٤ سم ، ب ء = ٦ سم

(١) أثبت أن : Δ أ ب حـ $\sim$ Δ ء ب هـ

(٢) أوجد مساحة Δ ء ب هـ

(٢٠) في الشكل المقابل : إذا كان :

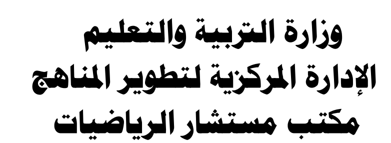
$\overline{أب}$ مماس للدائرة (م) ، أ ب = ٢٠ سم ،

محيط الدائرة (م) = ٩٤,٢ سم

فاوجد : طول $\overline{أ حـ}$ (π = ٣,١٤)

حلول تمارين عامة على الوحدة الثانية

(١) ٢٠
(٢) ٥٠
(٣) ٨
(٤) ٦
(٥) ٢٠
(٦) ٦
(٧) ٦
(٨) ٢ : ٣
(٩) ١
(١٠) ٤٩ : ٢٥
(١١) ٣
(١٢) 75°
(١٣) ٦
(١٤) ٢ : ٣
(١٥) ٤
(١٦) ٤ : ٣
(١٧) ٣
(١٨) ٤ : ١
(١٩) رقم (٢) ٤٣,٢ سم^2
(٢٠) ١٠ سم



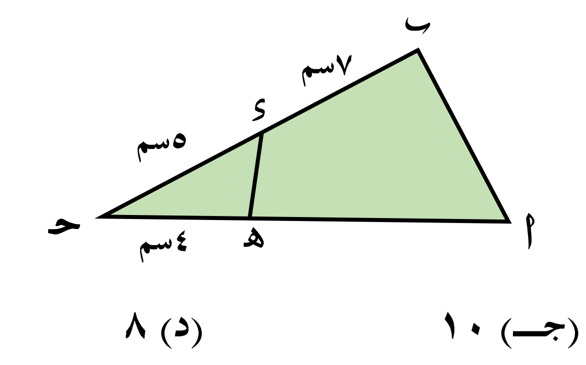
إختبار على الوحدة الثانية

أولًا : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مضلعان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين ٢ : ٥ فإذا كان محيط المضلع الأصغر ٨ سم فإن محيط المضلع الأكبر = ... سم

(أ) ٥٠ (ب) ٢٥ (جـ) ٢٠ (د) ١٠

(٢) في الشكل المقابل : إذا كان :



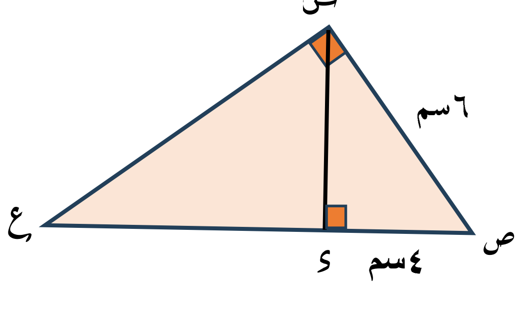
Δ حـ ب أ ∼ Δ حـ هـ ء ،

حـ ء = ٥سم ، حـ هـ = ٤سم ، ب ء = ٧ سم

فإن : أ هـ = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ١١ (جـ) ١٠ (د) ٨

(٣) في الشكل المقابل : إذا كان :



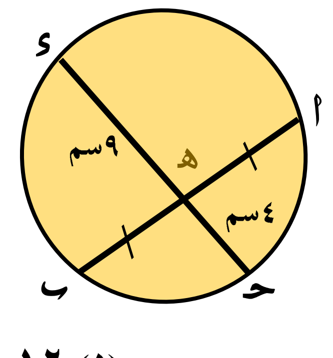
ق (∠ ص س ع) = ق (∠ س ء ع) = ٩٠° ،

س ص = ٦ سم ، ص ء = ٤ سم

فإن : ء ع = ... سم

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٩

(٤) في الشكل المقابل : إذا كان :



$\overline{\text{أ ب}}$ ∩ $\overline{\text{حـ ء}}$ = { هـ } ،

أ هـ = هـ ب ، حـ هـ = ٤سم ، هـ ء = ٩سم ،

فإن : أ ب = ...

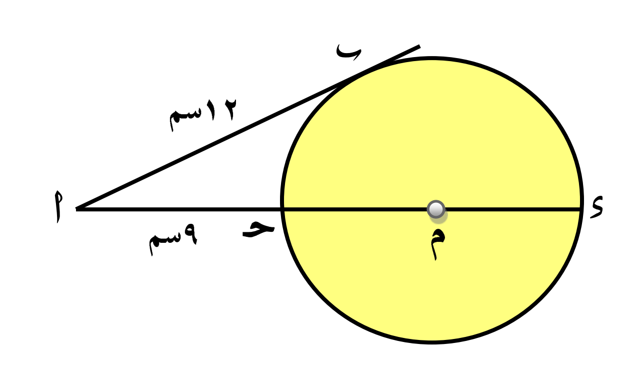
(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٢

(٥) في الشكل المقابل : إذا كان :

$\overline{\text{أب}}$ مماس للدائرة م ، $\overline{\text{حء}}$ قطر فيها ،

أب = ١٢ سم ، أ حـ = ٩ سم

فإن : محيط الدائرة = ... سم



(أ) ١٦ π (ب) ٨ π

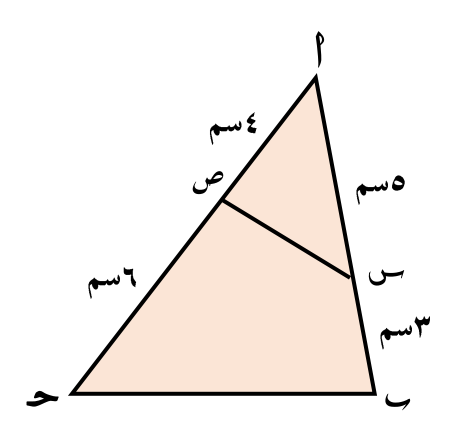
(جـ) ٧ π (د) ٤ π

(٦) في الشكل المقابل : إذا كان :

أس = ٥سم ، أص = ٤سم ، س ب = ٣سم ،

ص حـ = ٤سم ، مساحة Δ أس ص = ١٦ سم^2

فإن : مساحة الشكل س ب حـ ص = ... سم^2



(أ) ٤٠ (ب) ٣٢

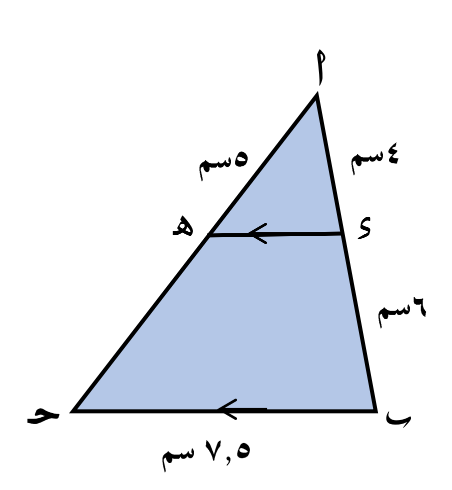
(جـ) ١٨ (د) ١٦

(٧) في الشكل المقابل : إذا كان :

$\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ، أهـ = ٥سم ، أء = ٤سم ،

ءب = ٦سم ، ب حـ = ٤سم

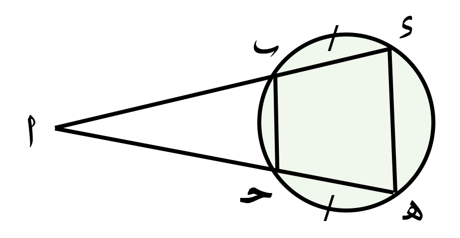
فإن : محيط الشكل ءب حـ هـ = ... سم



(أ) ٣٠ (ب) ٢٧,٥

(جـ) ٢٤ (د) ١٦

ثانيًا : الأسئلة المقالية.

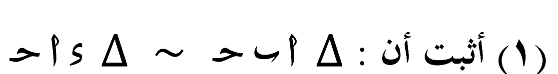


(٨) في الشكل المقابل :

ق (⌒ب ء) = ق (⌒حـ هـ) ،

أثبت أن : Δ أ حـ ب ~ Δ أ ء هـ

(٩) في الشكل المقابل :



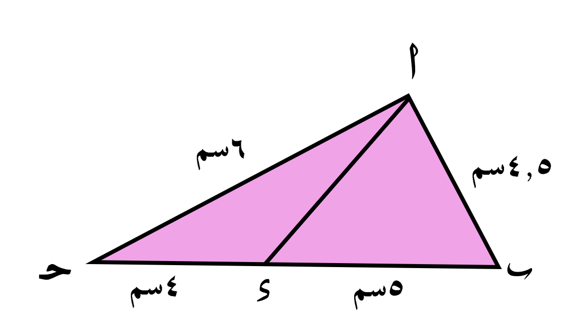
Δ أ ب حـ فيه ، د ∈ ‾ب حـ بحيث :

أ ب = ٤,٥سم ، أ حـ = ٦سم ، ب ء = ٥سم ،

ء حـ = ٤سم.

(١) أثبت أن : Δ أ ب حـ ~ Δ ء أ حـ

(٢) أوجد النسبة بين محيط Δ أ ب حـ إلى محيط Δ ء أ حـ



حلول إختبار على الوحدة الثانية

(١) ٢٠

(٢) ١١

(٣) ٥

(٤) ١٢

(٥) ٧ π

(٦) ١٦

(٧) ٢٤

(٩) ٣ : ٢

فهرس الوحدة الثالثة (هندسة)

الوحدة الثالثة : نظريات التناسب في المثلث

الدرس الأول: المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

نظرية (١) :

إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة.

في المثلث أ ب حـ إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{د هـ}} \parallel \overline{\text{ب حـ}}$

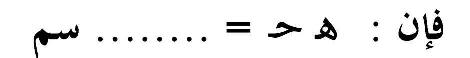
فيكون : $\frac{\text{أ د}}{\text{د ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ حـ}}$

ملاحظة : من خواص التناسب يكون :

$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ د}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{أ هـ}}$ ، $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب د}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{حـ هـ}}$

مثال محلول (١): في الشكل المقابل : إذا كان : $\overline{\text{د هـ}} \parallel \overline{\text{ب حـ}}$ ،

أ د = ٤ سم ، د ب = ٦ سم ، أ هـ = ٣ سم



فإن : هـ حـ = ... سم

(أ) ٩ (ب) ٦

(حـ) ٤,٥ (د) ٣,٥

الحـــــــــــل

$\frac{\text{أ د}}{\text{د ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ حـ}}$ ⟵ $\frac{٤}{٦} = \frac{٣}{\text{هـ حـ}}$ ⟵ هـ حـ = ٤,٥ سم

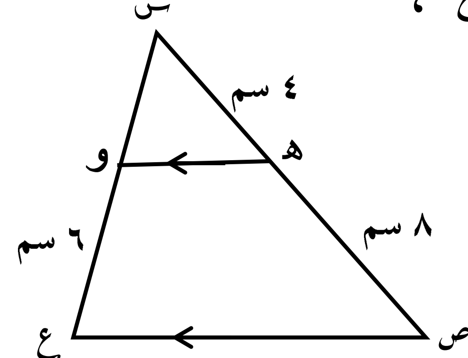
تدريب (١): في الشكل المقابل : إذا كان : $\overline{هو}$ // $\overline{صع}$ ،

س هـ = ٤ سم ، هـ ص = ٨ سم ، و ع = ٦ سم

فإن: س و = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٢

(جـ) ٣,٥ (د) ٢,٥



مثال محلول (٢): في الشكل المقابل : إذا كان : $\overline{جـ أ}$ // $\overline{هـ د}$ ،

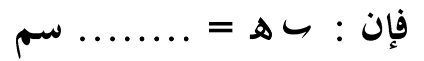
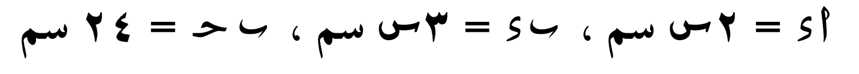
أ د = ٢س سم ، ب د = ٣س سم ، ب جـ = ٢٤ سم

فإن : ب هـ = ... سم

(أ) ١٥,٢ (ب) ١٤,٤

(جـ) ١٨ (د) ١٦

الحـــــــــــــل

$\frac{ب هـ}{ب جـ} = \frac{ب د}{ب أ}$ ⟸ $\frac{ب هـ}{٢٤} = \frac{٣س}{٥س}$ ⟸ ب هـ = ١٤,٤ سم

تدريب (٢): إذا كان : $\overline{ب أ}$ // $\overline{هـ د}$ ، أ د = ٢س سم ،

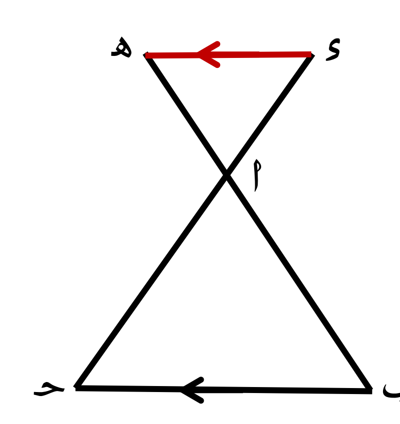
ب هـ = ٢٤ سم ، جـ هـ = ٦ سم ، أ جـ = ١٨ سم

فإن : س = ... سم

(أ) ٧,٢ (ب) ٦,٢

(جـ) ٣,٦ (د) ٤,٦

نتيجة : إذا رسم مستقيم خارج مثلث أ ب حـ يوازى ضلعًا من أضلاع المثلث فإن :



$$\frac{\text{أب}}{\text{أهـ}} = \frac{\text{أحـ}}{\text{أد}}$$

$$\frac{\text{أب}}{\text{بهـ}} = \frac{\text{أحـ}}{\text{حـد}} \quad ، \quad \frac{\text{أهـ}}{\text{هـب}} = \frac{\text{أد}}{\text{دحـ}}$$

مثال محلول (٣): في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{حـد}}$ ، أهـ = ٢ سم ،

بهـ = ٣ سم ، حـهـ = ٦ سم

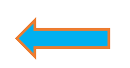
فإن : أد = ... سم

(أ) ٤   (ب) ٦

(حـ) ٨   (د) ١٠

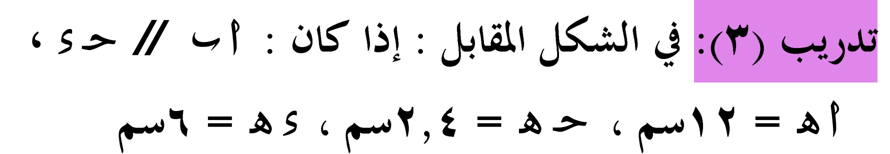
الحـــــــــــــل

$$\frac{\text{أد}}{\text{أهـ}} = \frac{\text{بحـ}}{\text{بهـ}}$$



$$\frac{\text{أد}}{٢} = \frac{٩}{٣}$$

أد = ٦ سم



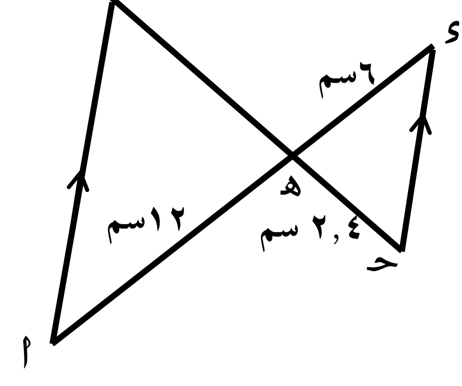
تدريب (٣): في الشكل المقابل : إذا كان : $\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{حـد}}$ ،

أهـ = ١٢سم ، حـهـ = ٢,٤سم ، دهـ = ٦سم

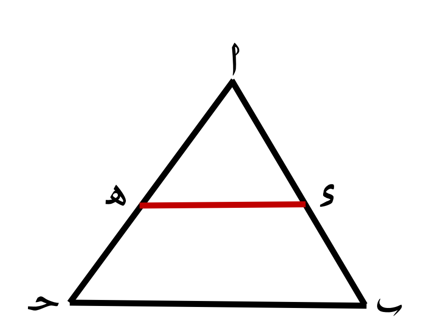
فإن : بهـ = ... سم

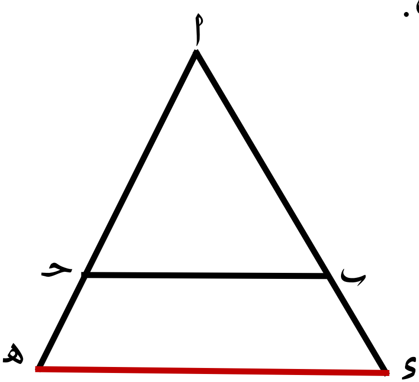
(أ) ٤,٢   (ب) ٢,٨

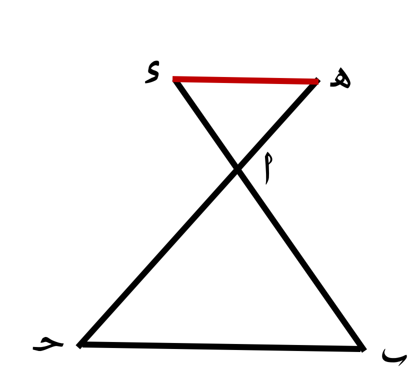
(حـ) ٤,٨   (د) ٨,٤



عكس نظرية (١) : إذا قطع مستقيم ضلعين من أضلاع مثلث ، وقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة فإنه يوازى الضلع الثالث.







في كل من الأشكال السابقة إذا كان :

$\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أه}}{\text{هحـ}}$ أو $\frac{\text{أء}}{\text{أب}} = \frac{\text{أه}}{\text{أحـ}}$ أو $\frac{\text{أب}}{\text{بء}} = \frac{\text{أحـ}}{\text{حـه}}$

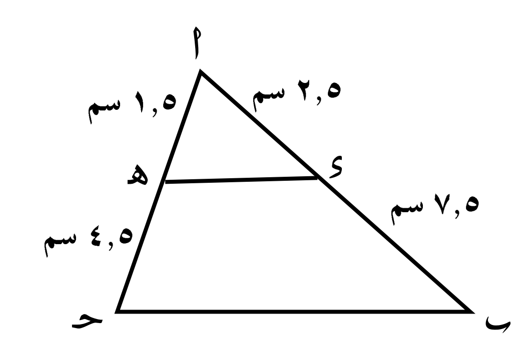
فإن : $\overline{\text{ءه}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$

مثال محلول (٤): في الشكل المقابل :

إذا كان : أء = ٢,٥ سم ،

ءب = ٧,٥ سم ، أه = ١,٥ سم ،

هحـ = ٤,٥ سم. أثبت أن : $\overline{\text{ءه}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$

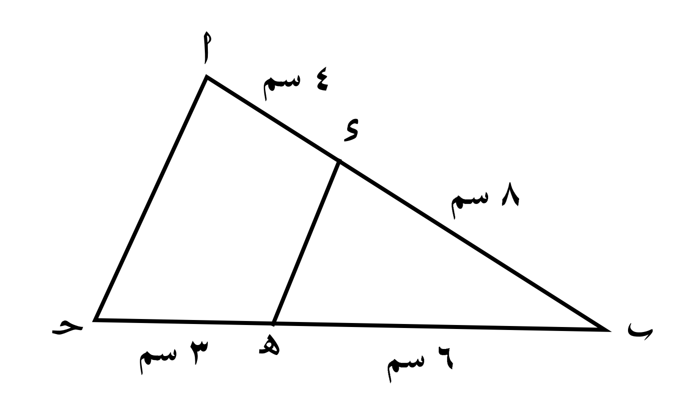


الحـــــــــــــل

$\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{٢,٥}{٧,٥} = \frac{١}{٣}$ ، $\frac{\text{أه}}{\text{هحـ}} = \frac{١,٥}{٤,٥} = \frac{١}{٣}$

$\therefore \frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أه}}{\text{هحـ}}$ ⟸ $\overline{\text{ءه}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$

تدريب (٤): في الشكل المقابل :



إذا كان : ب ء = ٨ سم ،

أ ء = ٤ سم ، ب هـ = ٦ سم ،

هـ حـ = ٣ سم.

أثبت أن : $\overline{\text{ء هـ}} \,/\!/\, \overline{\text{أ حـ}}$

مثال محلول (٥): في الشكل المقابل : $\overline{\text{أ ب}} \,/\!/\, \overline{\text{حـ ء}}$

إذا كان : أ هـ = (ص+١) سم ، هـ ء = (٣ص) سم ،

ب هـ = (٢ص+١) سم ، هـ حـ = (٦ص−٢) سم

فإن : ص = ... سم

(أ) ١ (ب) ٢

(حـ) ٣ (ء) ٤

∵ $\overline{\text{أ ب}} \,/\!/\, \overline{\text{حـ ء}}$

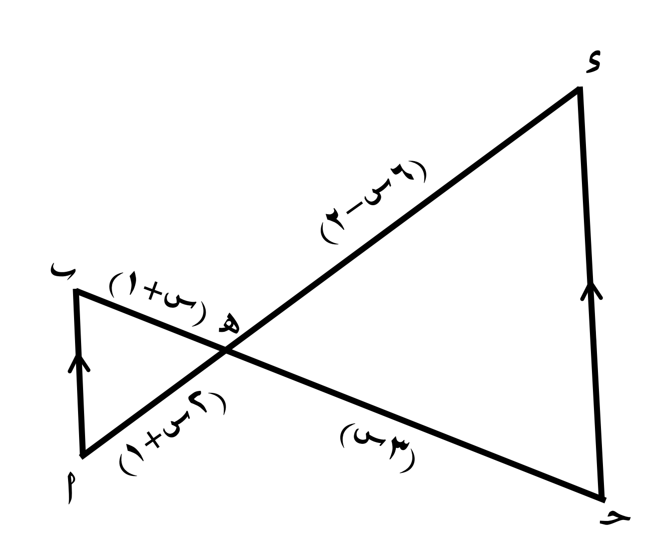
∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ء}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ حـ}}$ ⟸ $\frac{\text{ص} + ١}{٣\text{ص}} = \frac{٢\text{ص} + ١}{٦\text{ص} - ٢}$

$٦\text{ص}^{٢} + ٦\text{ص} - ٢\text{ص} - ٢ = ٦\text{ص}^{٢} + ٣\text{ص}$

$٤\text{ص} - ٢ = ٣\text{ص}$

∴ ص = ٢ سم

تدريب (٥): فى الشكل المقابل :



$\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{حـء}}$

إذا كان : أهـ = (٢س+١) سم ،

هـء = (٦س−٢) سم ،

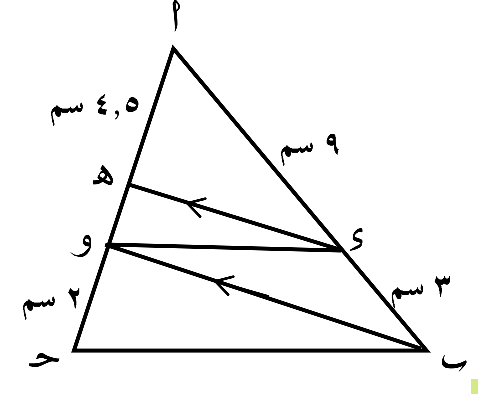
ب هـ = (س+١) سم ،

هـ حـ = (٣س) سم

فإن : س = ... سم

(أ) ١ (ب) ٢ (حـ) ٣ (ء) ٤

مثال محلول (٦): فى الشكل المقابل : $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{ب و}}$



إذا كان : أء = ٩ سم ، ء ب = ٣ سم ،

أهـ = ٤,٥ سم ، و حـ = ٢ سم

فاثبت أن : $\overline{\text{ء و}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

الحــــــــــل

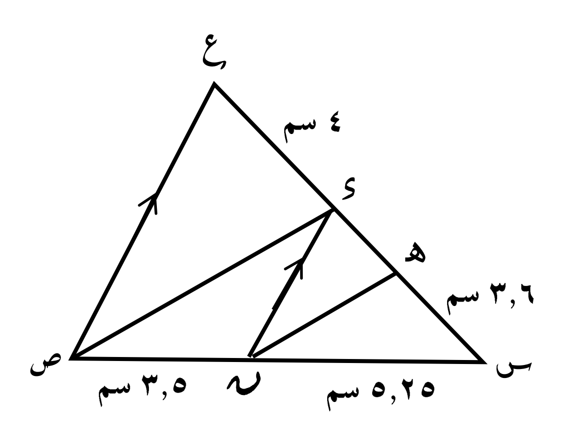
∵ $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{ب و}}$

∴ $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـو}}$ ⟸ $\frac{٩}{٣} = \frac{٤,٥}{\text{هـو}}$ ⟸ هـ و = ١,٥ سم

$\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{٩}{٣} = ٣$ ، $\frac{\text{أو}}{\text{وحـ}} = \frac{٦}{٢} = ٣$

∴ $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أو}}{\text{وحـ}}$ ⟸ $\overline{\text{ء و}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

تدريب (٦): فى الشكل المقابل : ن ى // ص ع



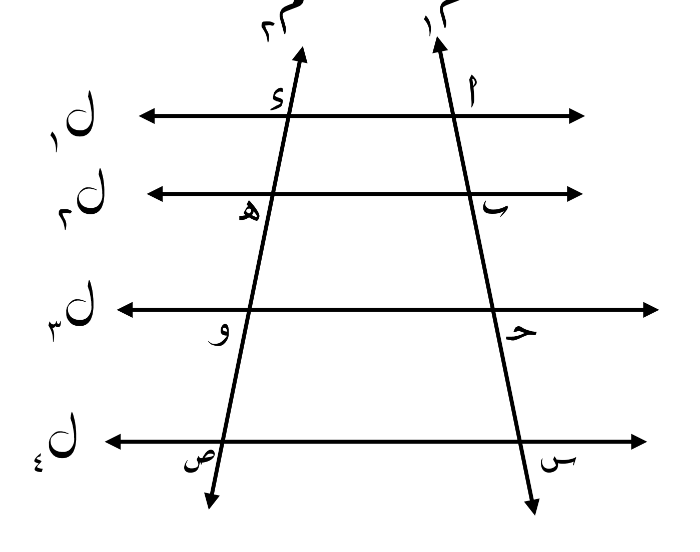
إذا كان : س ن = ٥,٢٥ سم ،

ن ص = ٣,٥ سم ،

س هـ = ٣,٦ سم ، ع ى = ٤ سم

أثبت أن : ن هـ // ى ص

نظرية تاليس العامة :



إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.

إذا كان : ل١ // ل٢ // ل٣ // ل٤

م١ ، م٢ قاطعان لهما

فإن : أب / بحـ = ى هـ / هـ و أو أحـ / أس = أو / أص أو أحـ / بحـ = ى و / هـ و

مثال محلول (٧): فى الشكل المقابل :

أ هـ // ب و // حـ ن // ى ع

إذا كان : ب حـ = ٦ سم ، حـ ى = ١ سم ،

و ن = ٤ سم ، هـ و = ١ سم

فإن : أ ب × ن ع = ...

(أ) ٦ (ب) ٥ (حـ) ٣ (ء) ١

الحـــــــــــل

∵ $\overline{\text{أهـ}} \parallel \overline{\text{ب و}} \parallel \overline{\text{حـ ن}} \parallel \overline{\text{ء ع}}$

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{هـ و}}{\text{و ن}}$ ⟸ $\frac{\text{أ ب}}{٦} = \frac{١}{٤}$ ⟸ أ ب $= \frac{٣}{٢}$ سم

∴ $\frac{\text{ب حـ}}{\text{حـ ء}} = \frac{\text{و ن}}{\text{ن ع}}$ ⟸ $\frac{٦}{١} = \frac{٤}{\text{ن ع}}$ ⟸ ن ع $= \frac{٢}{٣}$ سم

∴ أ ب × ن ع = ١

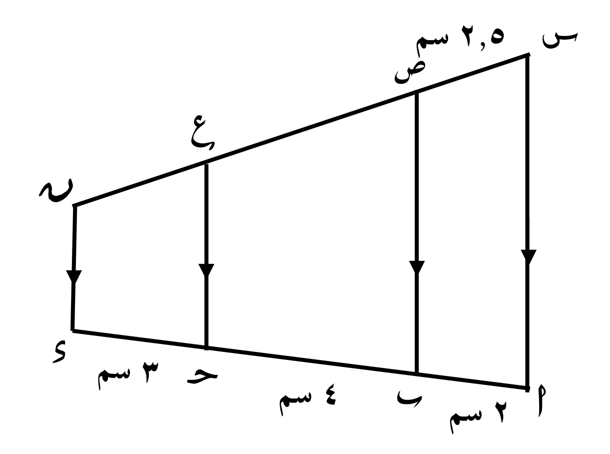
تدريب (٧): فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{أ س}} \parallel \overline{\text{ب ص}} \parallel \overline{\text{حـ ع}} \parallel \overline{\text{ء ن}}$

إذا كان : ب حـ = ٤ سم ، أ ب = ٢ سم ،

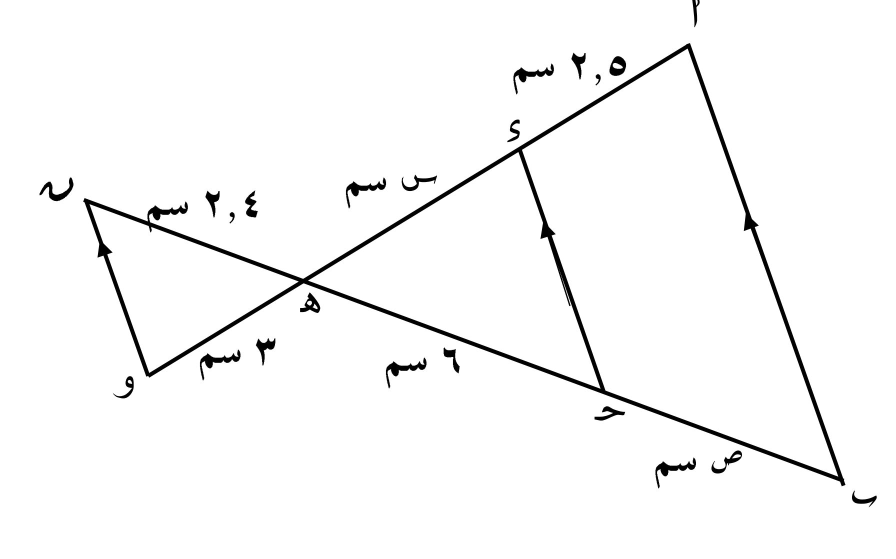
حـ ء = ٣ سم ، س ص = ٢,٥ سم

فإن : ص ع − ن ع = ...



(أ) ٣,٧٥ (ب) ١,٢٥ (حـ) ١,٥ (ء) ٥

مثال محلول (٨): فى الشكل المقابل :



$\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{ءحـ}} \parallel \overline{\text{نو}}$

إذا كان : أء = ٢,٥سم ،

ب حـ = ص سم

، حـ هـ = ٦سم ،

هـ ن = ٢,٤سم ،

وكان : هـ و = ٣ سم

فإن : س + ص = ... سم

(أ) ٦,٥ (ب) ٧,٥ (حـ) ٨,٥ (ء) ٩,٥

الحـــــــــــــــــل

∵ $\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{ءحـ}} \parallel \overline{\text{نو}}$

∴ $\frac{\text{أء}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{هـ ن}}$ ⟸ $\frac{٢,٥}{\text{ص}} = \frac{٣}{٢,٤}$ ⟸ ص = ٢ سم

∴ $\frac{\text{ء هـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{حـ هـ}}{\text{هـ ن}}$ ⟸ $\frac{\text{س}}{٣} = \frac{٦}{٢,٤}$ ⟸ س = ٧,٥ سم

∴ س + ص = ٩,٥ سم

تدريب (٨): فى الشكل المقابل :

أ هـ // و حـ // ن ء

إذا كان : أ ب = ٤ سم ،

ب حـ = ٤ سم ،

، حـ ء = ٦سم ، هـ ب = ص سم

، ن و = س سم

فإن : س + ص = ... سم

(أ) ٦,٥ (ب) ٧,٥ (حـ) ٨,٥ (ء) ٩,٥

نظرية تاليس الخاصة :

إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية وكانت أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين متساوية في الطول فإن : أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر تكون متساوية في الطول كذلك.

إذا كان : ل١ // ل٢ // ل٣ // ل٤

م١ ، م٢ قاطعان لهم.

وكان : أ ب = ب س = س حـ

فإن : ء هـ = هـ ص = ص و

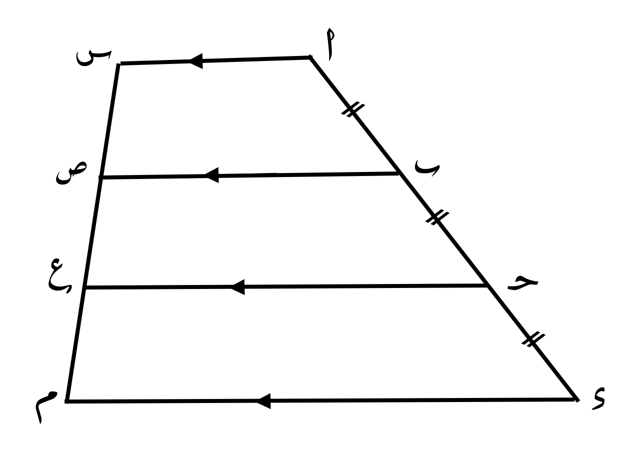
مثال محلول (٩): فى الشكل المقابل :

أس // ب ص // حـ ع // ء م

إذا كان : أ ب = ب حـ = حـ ء

وكان : س م = ١٢ سم

فإن : س ص = ... سم



(أ) ٢ (ب) ٣ (حـ) ٤ (ء) ٦

الحـــــــــــــل

∵ أس // ب ص // حـ ع // ء م ، أ ب = ب حـ = حـ ء

∴ س ص = ص ع = ع م = ٤ سم

تدريب (٩): فى الشكل المقابل :

أ هـ // ب ء // حـ ن // ء و

إذا كان : أ ب = ب حـ = حـ ء

وكان : ن و = ٢ سم

فإن : هـ ن = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (حـ) ٤ (ء) ٦

اجابات التدريبات

تدريب (١): س و = ٣ سم

تدريب (٢): س = ٧,٢ سم

تدريب (٣): هـ ب = ٤,٨ سم

تدريب (٤): $\frac{ب ء}{ء أ} = \frac{٨}{٤} = ٢$ ، $\frac{ب هـ}{هـ حـ} = \frac{٦}{٣} = ٢$

∴ $\frac{ب ء}{ء أ} = \frac{ب هـ}{هـ حـ}$ ⟸ $\overline{ء هـ} \parallel \overline{أ حـ}$

تدريب (٥): س = ٢ سم

تدريب (٧): ١,٢٥ سم

تدريب (٨): ٧,٥ سم

تدريب (٩): ٤ سم

تمارين على الدرس الأول

(١) في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث فيه : ده // ب جـ ،

أ د = ٣ سم ، أ هـ = ٢ سم ،

د ب = (س+١) سم ،

هـ جـ = ٦ سم

فإن: س = ... سم

(أ) ١٠ (ب) ٩ (جـ) ٨ (د) ٧

(٢) في الشكل المقابل : أ ب جـ مثلث فيه : د هـ // ب جـ ،

هـ جـ = ٢ سم ، أ هـ = ٨ سم ،

أ د = ٩ سم ،

د ب = س^{٢} سم

فإن: س = ... سم

(أ) ± ١,٥ (ب) ١,٥ (جـ) ± ٣,٥ (د) ٣,٥

(٣) في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث فيه : هـ د // ب جـ ،

أ د = ١٢ سم ، أ هـ = (ص+٥) سم ، هـ ب = ٣ سم ،

د جـ = ص سم فإن: ص = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٩ (جـ) ٣ (د) ٧

(٤) في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه : $\overline{\text{ءو}}$ // $\overline{\text{أحـ}}$ ،

ب ء = ٦ سم ، أ ء = ١٠ سم ،

أ حـ = ١٢ سم ،

فإن: ب و = ... سم

(أ) ١٠ (ب) ٧,٥ (حـ) ٨ (ء) ١٢,٥

(٥) في الشكل المقابل :

$\overline{\text{أء}}$ ∩ $\overline{\text{ب حـ}}$ = { ن } ، $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{حـ ء}}$ // $\overline{\text{هـ و}}$ ،

أ ن = ٢,٧ سم ، ن هـ = ٣ سم ،

هـ حـ = ٢ سم ، و ء = ١,٨ سم

فإن: ب ن = ... سم

(أ) ٥ (ب) ٣,٦ (حـ) ٣ (ء) ٢,٧

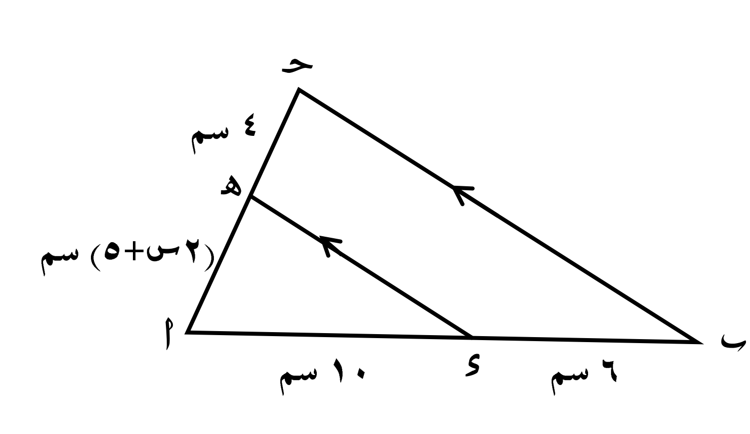
(٦) في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه : $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ،

ب ء = ٦ سم ، أ ء = ١٠ سم ،

هـ حـ = ٤ سم ، هـ أ = (٢س+٥) سم

فإن : س = ... سم



(أ) $\frac{٥}{٦}$ (ب) $\frac{٦}{٥}$ (حـ) $\frac{٥}{٤}$ (ء) $\frac{٤}{٥}$

(٧) في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه : ء هـ ⊥ أ ب ، حـ أ ⊥ أ ب

ب ء = ١٠ سم ، هـ ء = ٦ سم ،

ب هـ = ء حـ

فإن : هـ أ = ... سم

(أ) ٨ (ب) ٦,٤ (حـ) ٦ (ء) ٤,٨

(٨) فى الشكل المقابل :

أ هـ // ب ء // حـ ن // ء و

إذا كان : ء ن = حـ ء = ٤ سم ،

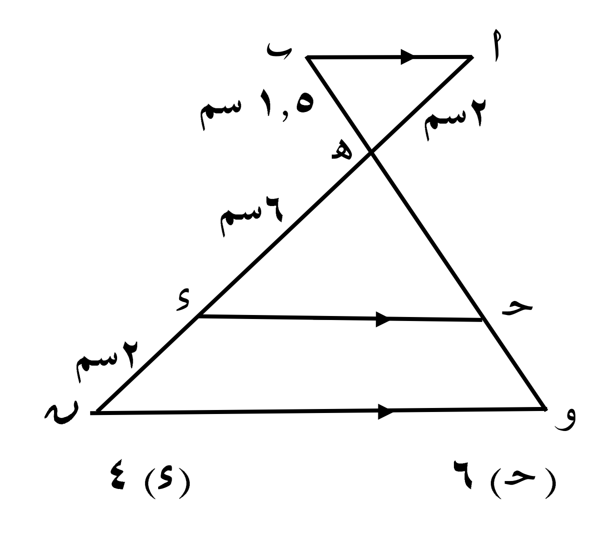
ب حـ = ٥ سم ، أ ب = س سم ،

ن و = ص سم.

فإن : س − ص = ... سم

(أ) ٣,٧٥ (ب) ٣,٢ (حـ) ٦,٩٥ (ء) ٠,٥٥

(٩) فى الشكل المقابل :



ب أ // ء حـ // ن و

إذا كان : ب هـ = ١,٥سم ، أ هـ = ٢ سم

، هـ ء = ٦سم ، ء ن = ٢ سم

فإن : هـ و = ... سم

(أ) ٩ (ب) ٨ (حـ) ٦ (ء) ٤

(١٠) فى الشكل المقابل :

ب حـ // ى ن // هـ و

إذا كان : ب ى = ٢سم ،

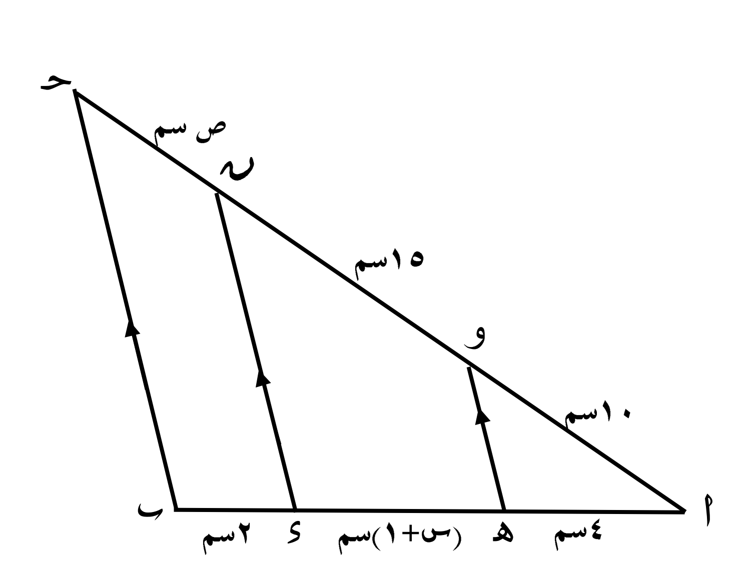
ى هـ = (س+١) سم

، هـ أ = ٤سم ،

، أ و = ١٠سم ، و ن = ١٥ سم

، ن حـ = ص سم

فإن : س ص = ... سم٢



(أ) ١٨ (ب) ٢٤ (حـ) ٢٦ (ى) ٢٥

إجابات تمارين على الدرس الأول

(١) ٨ (١٠) ٢٥

(٢) ١,٥

(٣) ٤

(٤) ٧,٥

(٥) ٣

(٦) $\frac{٥}{٦}$

(٧) ٦,٤

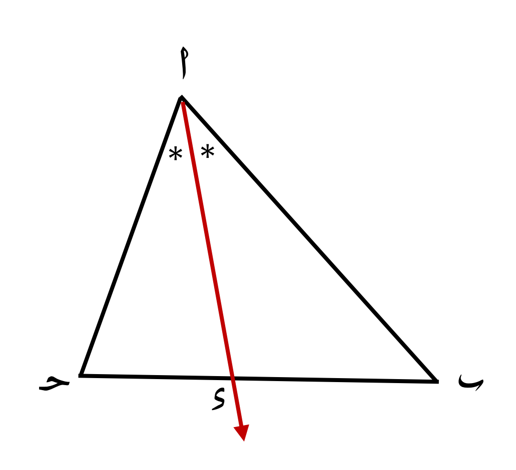
(٨) ٠,٥٥

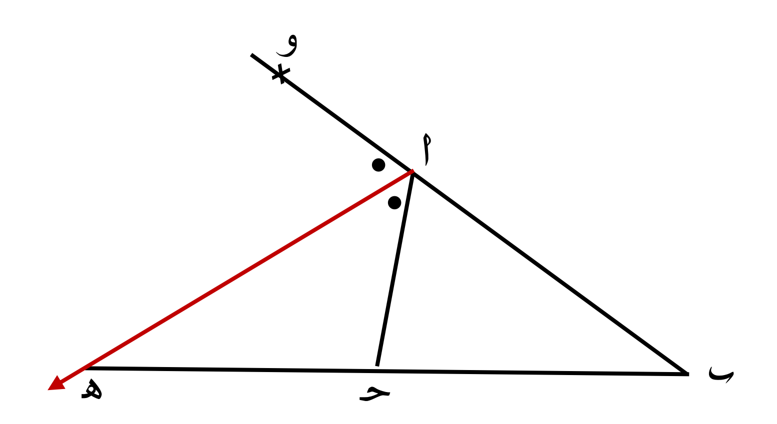
(٩) ٦

الدرس الثانى : منصفا الزاوية والأجزاء المتناسبة

نظرية (٣) :

إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس ، وقسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو الخارج إلى جزأين فإن النسبة بين طوليهما تساوى النسبة بين طولى الضلعين الآخرين.





$\overleftarrow{\text{أء}}$ ينصف (∠ ب أ جـ)

$$\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء جـ}}$$

$\overleftarrow{\text{أهـ}}$ ينصف (∠ جـ أ و) الخارجة للمثلث

$$\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}}$$

مثال محلول (١): فى الشكل المقابل :

$\overleftarrow{\text{أء}}$ ينصف (∠ ب أ جـ)

إذا كان : أ ب = ٩ سم ، ب جـ = ٨ سم ،

أ جـ = ٦ سم

(١) فإن : $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء جـ}}$ = ...

(أ) ٣ : ٢ (ب) ٢ : ٣ (حـ) ٤ : ٣ (ى) ٣ : ٤

(٢) فإن : ب ى = ... سم

(أ) ٩ (ب) ٦ (حـ) ٤,٨ (ى) ٨,٤

الحـــــــــــل

(١) $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{ب ى}}{\text{ى حـ}}$ ⟵ $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى حـ}} = \frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}$

(٢) $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى حـ}} = \frac{٣}{٢}$ ⟵ $\frac{\text{ب ى}}{٨ - \text{ب ى}} = \frac{٣}{٢}$ ⟵ ب ى = ٤,٨ سم

تدريب (١): فى الشكل المقابل :

$\overrightarrow{\text{أ ى}}$ ينصف (∠ ب أ حـ)

إذا كان : أ ب = ١٥ سم ،

ب ى = (س+١) سم ،

أ حـ = ٩ سم ، ى حـ = ٦ سم

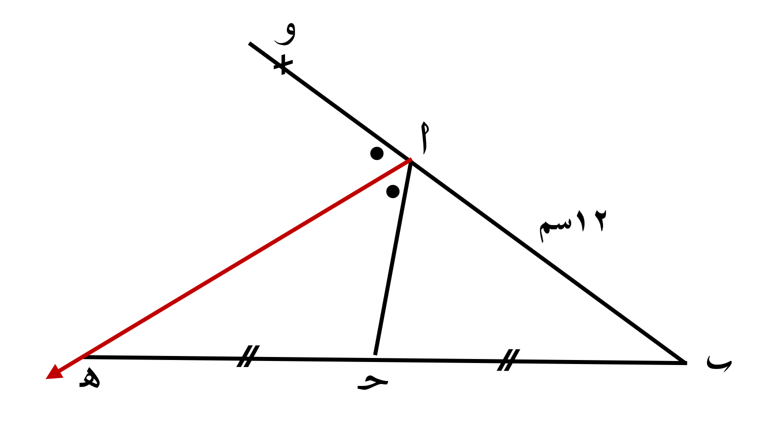
(١) فإن : $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ حـ}}$ = ...

(أ) ٣ : ٥ (ب) ٦ : ٥ (حـ) ٥ : ٣ (ى) ٥ : ٦

(٢) قيمة س = ... سم

(أ) ٩ (ب) ٨ (حـ) ١٠ (ى) ١١

مثال محلول (٢): فى الشكل المقابل :



$\overrightarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف (∠ حـ أ و)

إذا كان : أ ب = ١٢ سم ،

ب حـ = حـ هـ

فإن : أ حـ = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (حـ) ٥ (ء) ٦

الحــــــــــــل

نفرض أن : ب حـ = حـ هـ = س سم

$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ حـ}}$ ⟸ $\frac{١٢}{\text{ء حـ}} = \frac{٢\,\text{س}}{\text{س}}$ ⟸ ء حـ = ٦ سم

تدريب (٢): فى الشكل المقابل :

ن
س
٥سم
٣سم
م
ع
٦ سم
ص

$\overrightarrow{\text{س م}}$ ينصف (∠ ع س ن)

إذا كان : س ص = ٥ سم ، س ع = ٣ سم ،

ص ع = ٦ سم

(١) فإن : $\frac{\text{ص م}}{\text{ع م}}$ = ...

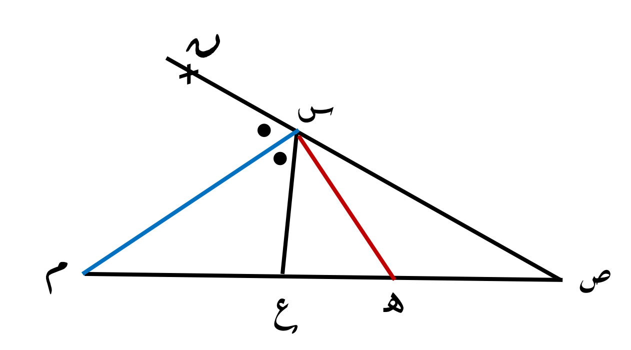
(أ) ٥ : ٣ (ب) ٣ : ٥ (حـ) ٢ : ٣ (ء) ٣ : ٢

(٢) فإن : ع م = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٨ (حـ) ٩ (ء) ١٠

وزارة التربية والتعليم
الإدارة المركزية لتطوير المناهج
مكتب مستشار الرياضيات

ملاحظات :



في المثلث س ص ع حيث : س ص $\neq$ س ع

$\overleftarrow{\text{س هـ}}$ ينصف (∠ ص س ع)

$\overleftarrow{\text{س م}}$ ينصف (∠ ع س ن) الخارجة للمثلث

يكون : (أ) $\frac{\text{س ص}}{\text{س ع}} = \frac{\text{ص هـ}}{\text{هـ ع}} = \frac{\text{ص م}}{\text{م ع}}$

(ب) ق (∠ هـ س م) = 90° (أي أن المنصفان الداخلى والخارجى لزاوية رأس مثلث متعامدان)

مثال محلول (٣): فى الشكل المقابل :

$\overleftarrow{\text{أ ء}}$ ينصف (∠ ب أ حـ) ،

$\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{أ هـ}}$ ،

إذا كان : أ ب = ١٢ سم ،

أ حـ = ٦ سم ، حـ ب = ٩ سم.أوجد طول $\overline{\text{ء هـ}}$

الحل

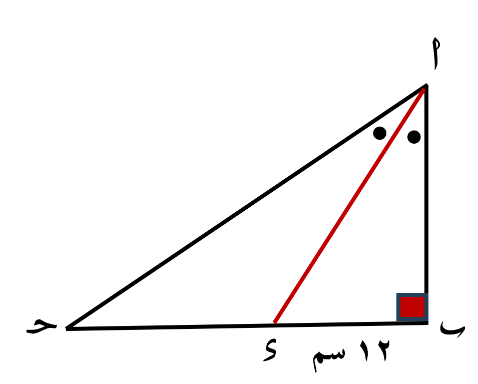
نفرض أن : ء حـ = س سم ⟸ فيكون : ب ء = (٩ − س) سم

$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}}$ ⟸ $\frac{12}{6} = \frac{9 - \text{س}}{\text{س}}$ ⟸ س = ٣ سم

$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{حـ هـ}}$ ⟸ $\frac{12}{6} = \frac{9 + \text{حـ هـ}}{\text{حـ هـ}}$ ⟸ حـ هـ = ٩ سم

∴ ء هـ = ٩ + ٣ = ١٢ سم

تدريب (٣): فى الشكل المقابل :



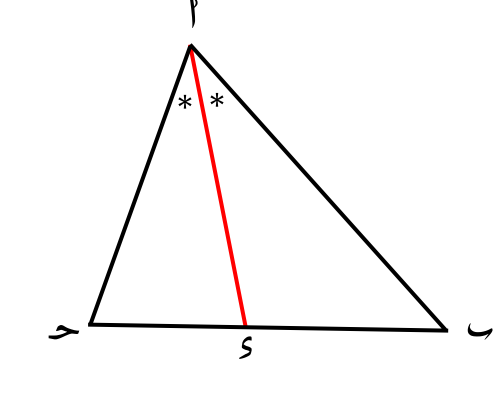
أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب ،

$\overleftarrow{\text{أ ء}}$ ينصف (∠ ب أ حـ)

إذا كان : ب ء = ١٢ سم ، أ ب : أ حـ = ٣ : ٥

أوجد طول كلًا من : $\overline{\text{ء حـ}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$

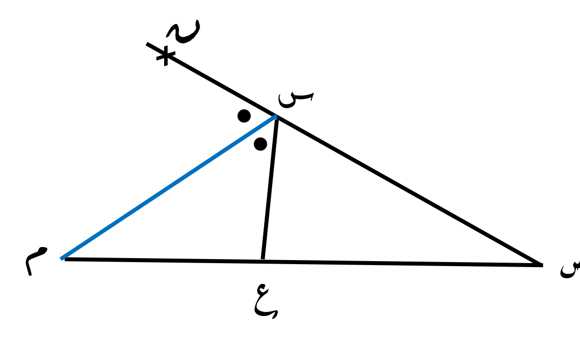
تمرين مشهور :



إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ ينصف (∠ ب أ حـ)

فإن : أ ء = $\sqrt{\text{أ ب × أ حـ − ب ء × حـ ء}}$

ملاحظة :

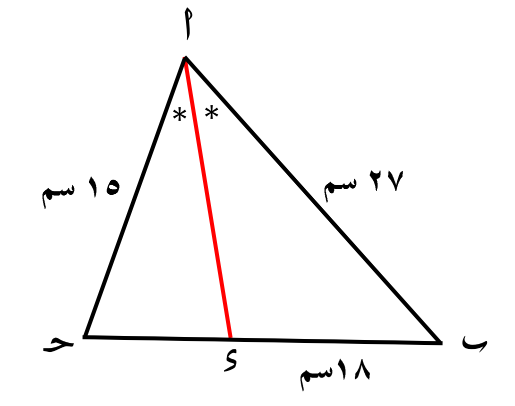


إذا كان : $\overleftarrow{\text{س م}}$ ينصف (∠ ع س ن)

(الزاوية الخارجة للمثلث ص س ع)

فإن : س م = $\sqrt{\text{ص م × م ع − س ص × س ع}}$

مثال محلول (٤): فى الشكل المقابل :



$\overleftarrow{\text{أ ء}}$ ينصف (∠ ب أ حـ)

إذا كان : أ ب = ٢٧ سم ، ب ء = ١٨ سم ،

أ حـ = ١٥ سم ، فإن :

(١) ء حـ = ... سم

(أ) ٩ (ب) ١٠ (حـ) ١١ (ء) ١٢

(٢) أ ء = ... سم

(أ) ٩ (ب) ١٠ (حـ) ١٥ (ء) ١٧

الحـــــــــــل

$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}}$ ⟸ $\frac{٢٧}{١٥} = \frac{١٨}{\text{ء حـ}}$ ⟸ ء حـ = ١٠ سم

أ ء = $\sqrt{\text{أ ب} \times \text{أ حـ} - \text{ب ء} \times \text{ء حـ}}$ = $\sqrt{٢٧ \times ١٥ - ١٨ \times ١٠}$ = ١٥ سم

تدريب (٤): فى الشكل المقابل :

$\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف (∠ ن أ حـ)

إذا كان : ب حـ = ٤ سم ،

أ حـ = ٩ سم ،

حـ هـ = ١٢ سم فإن :

(١) أ ب = ... سم

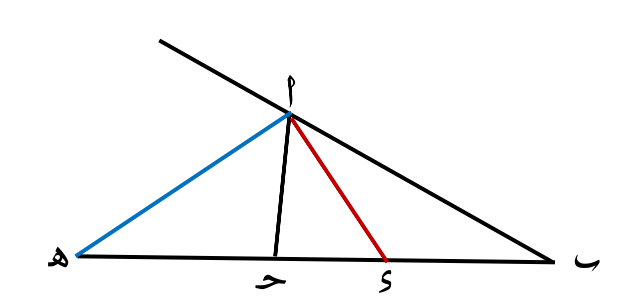
(أ) ١٢ (ب) ١٠ (حـ) ٨ (ء) ٦

(٢) أ هـ = ... سم

(أ) $٢١\sqrt{٢}$ (ب) ٢١ (حـ) $١٠\sqrt{٣}$ (ء) $٢\sqrt{٢١}$

حالات خاصة :

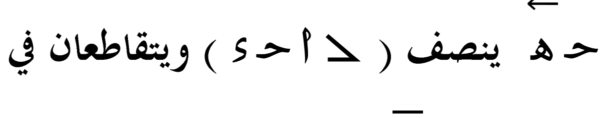
(١) في المثلث أ ب حـ



إذا كان : $\frac{ب ء}{ء حـ} = \frac{أ ب}{أ حـ}$

فإن : $\overleftarrow{أ ء}$ ينصف (∠ ب أ حـ)

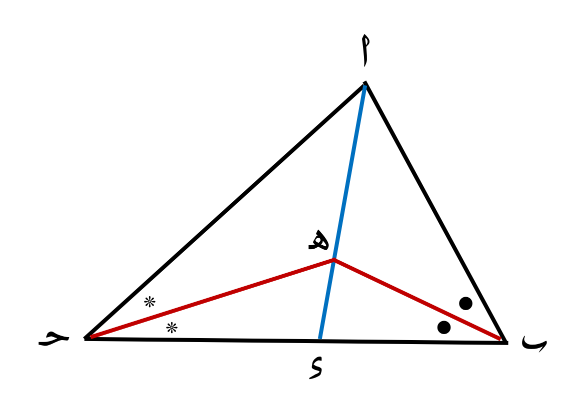
إذا كان : $\frac{ب هـ}{هـ حـ} = \frac{أ ب}{أ حـ}$ فإن : $\overleftarrow{أ هـ}$ ينصف (∠ أ) الخارجة للمثلث.



(٢) إذا كان : $\overleftarrow{ب هـ}$ ينصف (∠ أ ب ء) ،

$\overleftarrow{حـ هـ}$ ينصف (∠ أ حـ ء) ويتقاطعان في

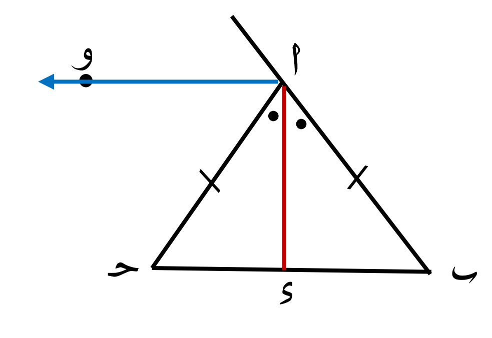
نقطة هـ ∈ $\overline{أ ء}$



فإن : $\frac{أ ب}{ب ء} = \frac{أ حـ}{حـ ء}$

(٣) إذا كان : المثلث أ ب حـ متساوى الساقين

(أ) وكان : $\overleftarrow{أ ء}$ ينصف (∠ ب أ حـ)

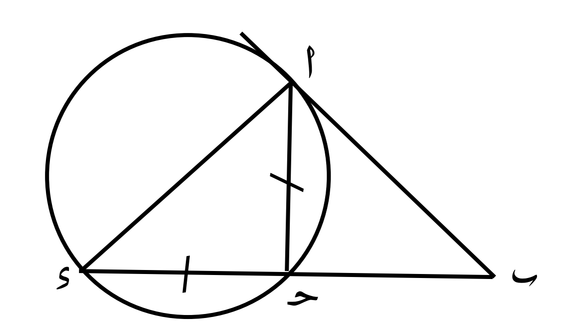


فإن : $\overline{أ ء}$ ⊥ $\overline{ب حـ}$ وينصفها.

(ب) وكان : $\overleftarrow{أ و}$ ينصف (∠ أ) الخارجة

فإن : $\overleftarrow{أ و}$ // $\overline{ب حـ}$

مثال محلول (٥): فى الشكل المقابل :



$\overleftarrow{\text{ب أ}}$ مماس للدائرة عند نقطة أ

إذا كان : حـ ء = أ حـ ،

أثبت أن : أ ب × أ حـ = ب حـ × أ ء

الحـــــــــــــل

$\overleftarrow{\text{ب أ}}$ مماس للدائرة عند نقطة أ ⟸ ∴ ق (∠ ب أ حـ) = ق (∠ ء)

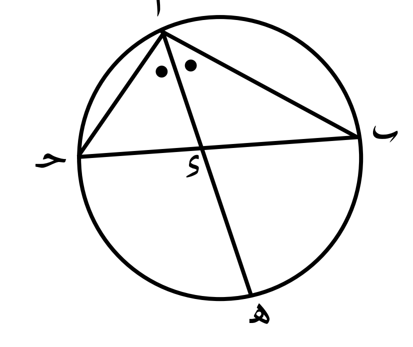
حـ ء = أ حـ ⟸ ∴ ق (∠ حـ أ ء) = ق (∠ ء)

∴ ق (∠ ب أ حـ) = ق (∠ حـ أ ء)

$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{حـ ء}}$ ⟸ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}}$

∴ أ ب × أ حـ = ب حـ × أ ء

تدريب (٥): فى الشكل المقابل :



$\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف (∠ ب أ حـ) المحيطية

أثبت أن : أ ء = $\sqrt{\text{أ ب × أ حـ − أ ء × ء هـ}}$

مثال محلول (٦): فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : ب حـ = ١٠ سم ،

أ ب = ١٥ سم ، حـ ء = ٨ سم ،

أ ء = ١٢ سم ، $\overleftarrow{\text{ب هـ}}$ ينصف (∠ أ ب حـ)

أثبت أن : $\overleftarrow{\text{ء هـ}}$ ينصف (∠ أ ء حـ)

الحـــــــــــل

$\overleftarrow{\text{ب هـ}}$ ينصف (∠ أ ب حـ) ⟸ $\frac{\text{ب أ}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ حـ}}$

$\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ حـ}} = \frac{١٥}{١٠} = \frac{٣}{٢}$

$\frac{\text{أ ء}}{\text{ء حـ}} = \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$ ∴ $\frac{\text{أ ء}}{\text{ء حـ}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ حـ}}$

∴ $\overleftarrow{\text{ء هـ}}$ ينصف (∠ أ ء حـ)

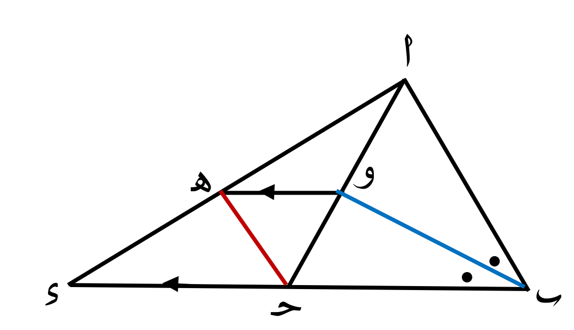
تدريب (٦): فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه ، أ ب = أ حـ ،

وإذا كان : ب حـ = حـ ء ، $\overline{\text{و هـ}}$ // $\overline{\text{حـ ء}}$

$\overleftarrow{\text{ب و}}$ ينصف (∠ أ ب حـ)

أثبت أن : $\overleftarrow{\text{حـ هـ}}$ ينصف (∠ أ حـ ء)



اجابات التدريبات

تدريب (١): ٥ : ٣ ، س = ٩ سم

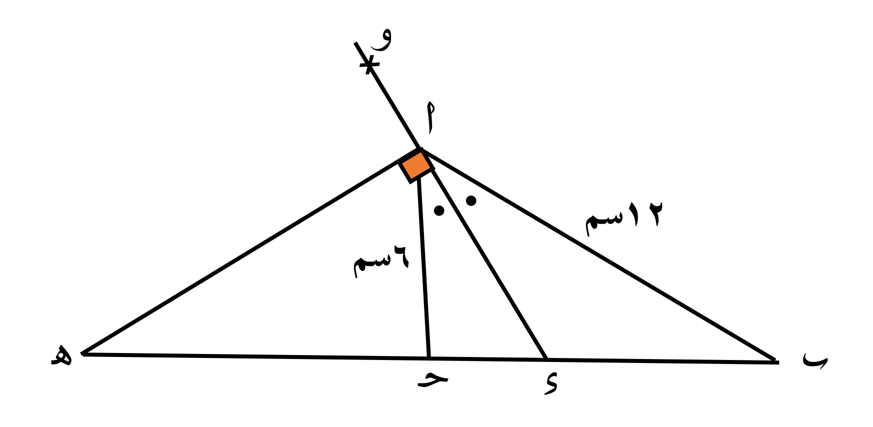
تدريب (٢): ٥ : ٣ ، ع م = ٩ سم

تدريب (٣): ء حـ = ٢٠ سم ، أ ب = ٢٤ سم

تدريب (٤): أ ب = ١٢ سم ، أ هـ = ٢ $\sqrt{٢١}$ سم

تمارين على الدرس الثانى

(١) في الشكل المقابل :



$\overleftarrow{\text{أى}}$ ينصف (∠ ب أ حـ) ،

$\overline{\text{أى}}$ ⊥ $\overline{\text{أ هـ}}$ ،

أب = ١٢ سم ،

أحـ = ٦ سم ،

ب حـ = ٩ سم

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى حـ}}$ = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (حـ) $\frac{١}{٣}$ (ى) ٣

(٢) ب ى = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٨ (حـ) ٩ (ى) ٣

(٣) منصف (∠ ب أ حـ) من الخارج هو ....

(أ) $\overleftarrow{\text{أى}}$ (ب) $\overleftarrow{\text{أحـ}}$ (حـ) $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ (ى) $\overleftarrow{\text{أ و}}$

(٤) حـ هـ = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٧ (حـ) ٨ (ى) ٩

(٥) أى = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٣ (حـ) ٣$\sqrt{٦}$ (ى) ٦$\sqrt{٣}$

(٦) أ هـ = ... سم

(أ) $٣\sqrt{١٠}$ (ب) $١٠\sqrt{٣}$ (حـ) ١٠ (ء) ٣

(٧) $\frac{ب هـ}{هـ حـ}$ = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (حـ) $\frac{١}{٣}$ (ء) ٣

إجابات تمارين على الدرس الثانى

(١) ٢

(٢) ٦

(٣) $\overleftarrow{أ هـ}$

(٤) ٩

(٥) $٣\sqrt{٦}$

(٦) $٣\sqrt{١٠}$

(٧) ٢

فهرس الوحدة الرابعة (حساب مثلثات)

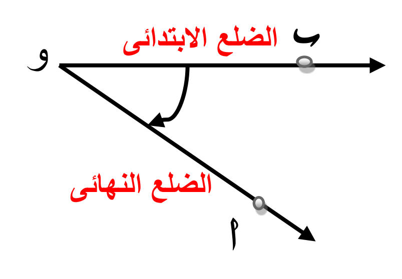
الوحدة الرابعة : حساب المثلثات

الدرس الأول: الزاوية الموجهة

ملخص الدرس:

الزاوية الموجهة : هى زوج مرتب من شعاعين هما ضلعا الزاوية لهما نقطة بداية واحدة هى رأس الزاوية

($\overleftarrow{\text{و أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ب}}$) وتسمى (∠ أ و ب) الموجهة



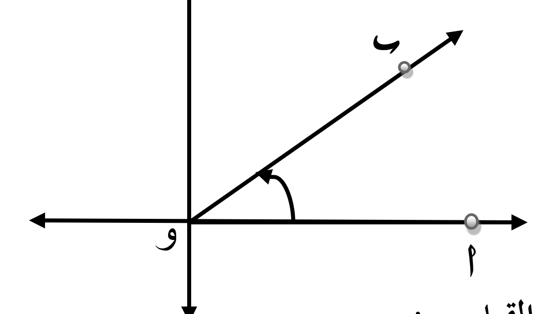
($\overleftarrow{\text{و ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{و أ}}$) وتسمى (∠ ب و أ) الموجهة

الوضع القياسى للزاوية الموجهة :

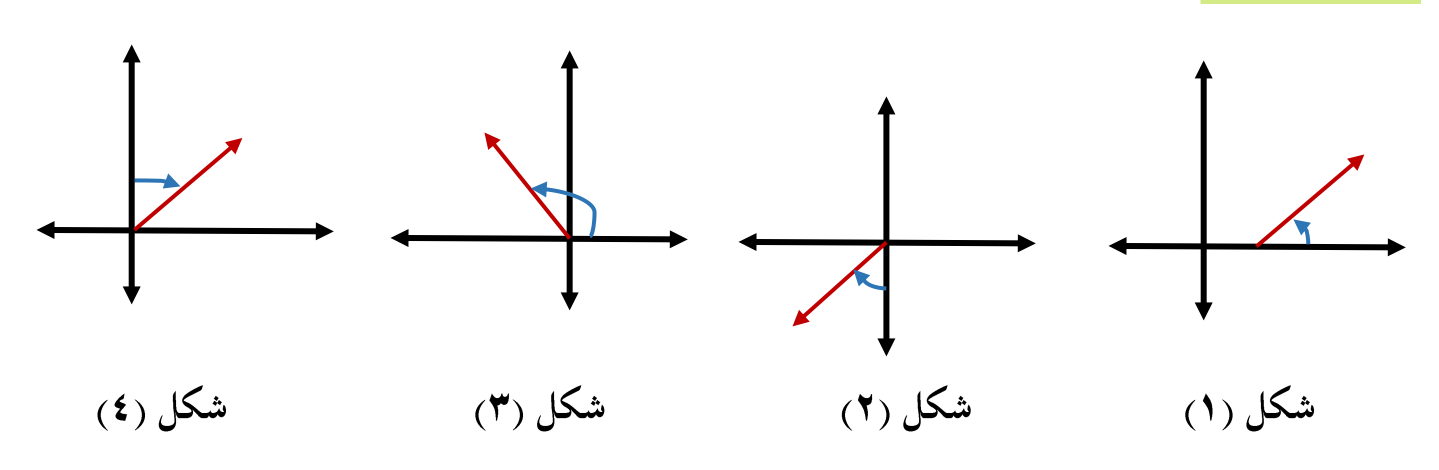
تكون الزاوية في الوضع القياسى إذا كان :

(١) رأسها نقطة الأصل لنظام إحداثى متعامد.

(٢) وضلعها الابتدائى هو الاتجاه الموجب لمحور السينات.



مثال محلول (١): أي من الأشكال الآتية يمثل زاوية في الوضع القياسى :



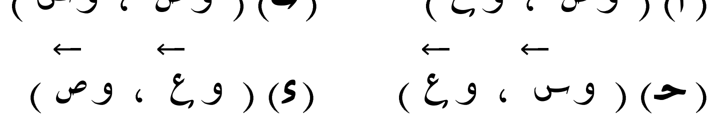
شكل (١) شكل (٢) شكل (٣) شكل (٤)

شكل (٣)

تدريب (١): في الشكل المقابل :

اختر الزوج المرتب الذى يمثل زاوية موجهة

في وضعها القياسى :



(أ) (وص ، وع)　　(ب) (وص ، وس)

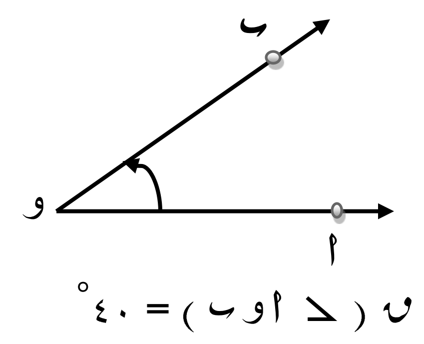
(حـ) (وس ، وع)　　(ى) (وع ، وص)

القياس الموجب والقياس السالب للزاوية :

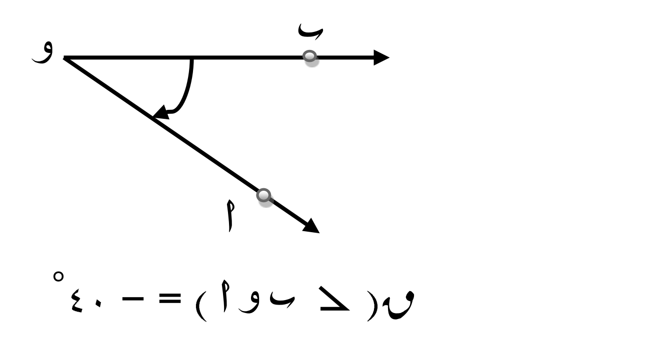
يكون لزاوية موجهة قياس :

☜ موجب إذا كان إتجاه الدوران من الضلع الإبتدائى إلي الضلع النهائى ضد إتجاه عقارب الساعة.

☜ سالب إذا كان إتجاه الدوران من الضلع الإبتدائى إلي الضلع النهائى مع إتجاه عقارب الساعة.

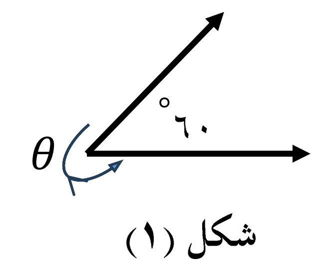


ق (∠ أ و ب) = ٤٠°

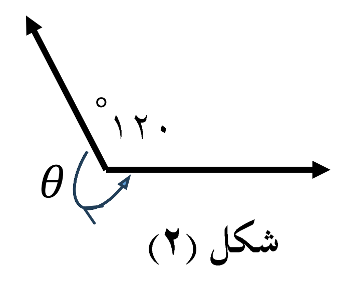


ق(∠ ب و أ) = − ٤٠°

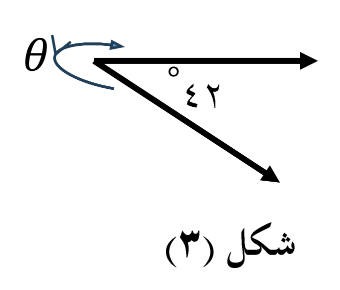
مثال محلول (٢): أوجد قياس الزاوية θ المشار إليها في الأشكال الآتية :



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

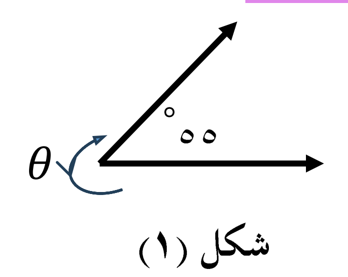
الحـــــــــــــــل

شكل (١) ‏ $ق (\angle \theta) = ٣٦٠° - ٦٠° = ٣٠٠°$

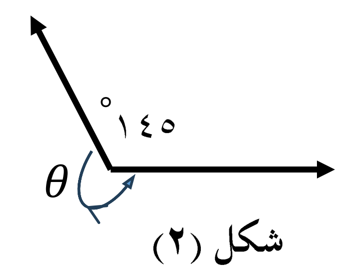
شكل (٢) ‏ $ق (\angle \theta) = ٣٦٠° - ١٢٠° = ٢٤٠°$

شكل (٣) ‏ $ق (\angle \theta) = - (٣٦٠° - ٤٢°) = - ٣١٨°$

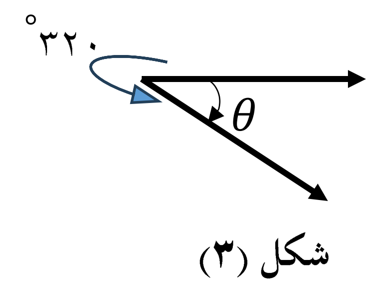
تدريب (٢): أوجد قياس الزاوية θ المشار إليها في الأشكال الآتية :



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

موقع الزاوية في المستوى الإحداثي المتعامد :

إذا كانت : ($\angle$ أ و ب) الموجهة والتي قياسها الموجب هو : θ

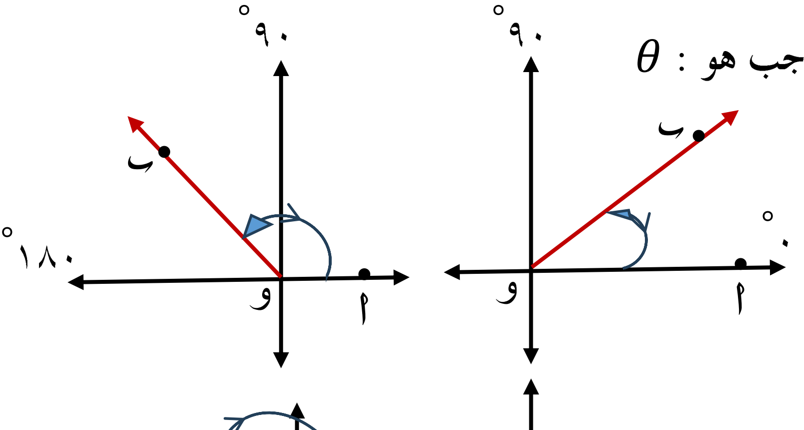
← فإن ضلعها النهائي $\overleftarrow{و ب}$ يقع في الربع :

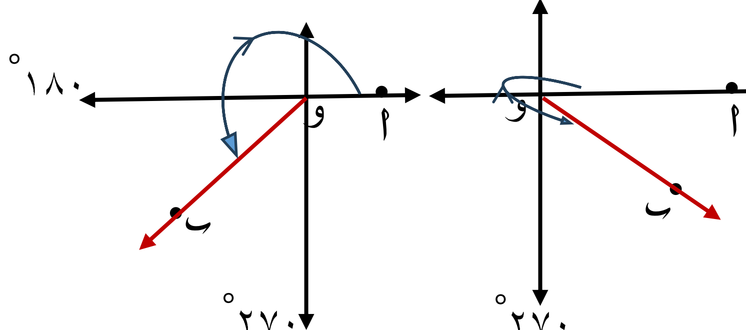
الأول إذا كان : ‏ $٠° > \theta > ٩٠°$

الثانى إذا كان : ‏ $٩٠° > \theta > ١٨٠°$

الثالث إذا كان : ‏ $١٨٠° > \theta > ٢٧٠°$

الرابع إذا كان : ‏ $٢٧٠° > \theta > ٣٦٠°$





مثال محلول (٣): عين الربع الذى تقع فيه الزوايا الآتية :

(أ) ٣٥٠° ‏ ‏ (ب) ١٦٠° ‏ ‏ (حـ) ٨٠° ‏ ‏ (ء) ٢١٠°

الحـــــــــــــل

(أ) الربع الرابع　　(ب) الربع الثانى　　(حـ) الربع الأول　　(ء) الربع الثالث

تدريب (٣): عين الربع الذى تقع فيه الزوايا الآتية :

(أ) ١٩٠°　　(ب) ٣٠٠°　　(حـ) ١١٠°　　(ء) ٥٠°

ملاحظة :

- ق(∠ أ و ب) الموجهة ≠ ق(∠ ب و أ) الموجهة.
- لكل زاوية في الوضع القياسي قياسان أحدهما موجب والآخر سالب ومجموع القيمتين المطلقتين للقياسان يساوى٣٦٠°
- إذا وقع ضلعها النهائي و ب على أحد محاور الاحداثيات فتكون : θ = ٠° أ، ٩٠° أ، ١٨٠° أ، ٢٧٠° أ، ٣٦٠° تسمى هذه الزوايا **زوايا ربعية**.

مثال محلول (٤):

(أ) عين القياس السالب للزاوية التي قياسها ١٥٠°

(ب) عين القياس الموجب للزاوية التي قياسها – ٢١٠°

الحـــــــــــــل

(أ) القياس السالب للزاوية التي قياسها ١٥٠° = ١٥٠° – ٣٦٠° = – ٢١٠°

(ب) القياس الموجب للزاوية التي قياسها – ٢١٠° = ٣٦٠° – ٢١٠° = ١٥٠°

تدريب (٤): (أ) عين القياس السالب للزاوية التي قياسها ٩٨°

(ب) عين القياس الموجب للزاوية التي قياسها – ١٩٥°

الزوايا المتكافئة : يُقال لعدة زوايا موجهة في الوضع القياسى أنها متكافئة إذا كان لها نفس الضلع النهائي.

عند رسم زاوية موجهة قياسها θ في الوضع القياسى فإن جميع الزوايا التي قياساتها = θ ± ن × ٣٦٠°

تكافيء الزاوية التي قياسها = θ حيث : ن ∈ ص

مثال محلول (٥): أوجد زاويتان إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب تكافىء كل من الزوايا الآتية :

(أ) ٧٠°　　　(ب) – ١٢٠°

الحــــــــــل

(أ) زاوية قياسها موجب = ٧٠° + ٣٦٠° = ٤٣٠°

زاوية قياسها سالب = ٧٠° – ٣٦٠° = – ٢٩٠°

(ب) زاوية قياسها موجب = – ١٢٠° + ٣٦٠° = ٢٤٠°

زاوية قياسها سالب = – ١٢٠° – ٣٦٠° = – ٤٨٠°

تدريب (٥): أوجد زاويتان إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب تكافىء كل من الزوايا الآتية :

(أ) ٢٠٠°　　　(ب) – ٩٠°

اجابات التدريبات

تدريب (١): ($\overleftarrow{\text{وع}}$ ، $\overleftarrow{\text{وص}}$)

تدريب (٢): شكل (١) – ٣٠٥°　　　شكل (٢) ٢١٥°　　　شكل (٣) – ٤٠°

تدريب (٣): (أ) الثالث　　　(ب) الرابع　　　(حـ) الثانى　　　(ء) الأول

تدريب (٤): (أ) – ٢٦٢°　　　(ب) ١٦٥°

تدريب (٥): (أ) ٥٦٠° ، – ١٦٠°　　　(ب) ٢٧٠° ، – ٤٥٠°

تمارين على الدرس الأول

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) تكون الزاوية الموجهة في الوضع القياسي إذا كان ضلعها الابتدائي هو ....

(أ) $\overleftarrow{\text{وس}}$ (ب) $\overleftarrow{\text{وس}'}$ (حـ) $\overleftarrow{\text{وص}}$ (ى) $\overleftarrow{\text{وص}'}$

(٢) أصغر قياس موجب للزاوية التي قياسها − ٧٠٠° هو ....

(أ) ٢٠° (ب) ١٢٠° (حـ) ٣٨٠° (ى) ٧٤٠°

(٣) أكبر قياس سالب للزاوية التي قياسها ١٠٠° هو ....

(أ) − ١٠٠° (ب) − ١٦٠° (حـ) − ٢٦٠° (ى) − ٦٢٠°

(٤) أصغر قياس موجب للزاوية التي قياسها ٩٠٠° هو ....

(أ) ٥٤٠° (ب) ٢٧٠° (حـ) ١٨٠° (ى) ٩٠°

(٥) جميع الزوايا الآتية مكافئة للزاوية التي قياسها ١١٠° ماعدا ....

(أ) − ٢٥٠° (ب) ٢٢٠° (حـ) ٤٧٠° (ى) ٨٣٠°

(٦) الزاوية التي قياسها ٢٢٧° تقع في الربع ....

(أ) الأول (ب) الثانى (حـ) الثالث (ى) الرابع

(٧) الزاوية التي قياسها − ٥٠° تقع في الربع ....

(أ) الأول (ب) الثانى (حـ) الثالث (ى) الرابع

(٨) تسمى الزاوية التي قياسها ٢٧٠° بالزاوية ....

(أ) القياسية (ب) المرجعية (حـ) الربعية (ى) الحادة

إستخدم الشكل المقابل للإجابة عما يلى :

(٩) الضلع الابتدائى للزاوية هو ....

(أ) $\overleftarrow{\text{و أ}}$ (ب) $\overleftarrow{\text{و ب}}$

(ج) $\overleftarrow{\text{أ و}}$ (د) $\overleftarrow{\text{ب و}}$

(١٠) الضلع النهائى للزاوية هو ....

(أ) $\overleftarrow{\text{و أ}}$ (ب) $\overleftarrow{\text{و ب}}$ (ج) $\overleftarrow{\text{أ و}}$ (د) $\overleftarrow{\text{ب و}}$

(١١) ق($\angle\, \theta$) السالب = ...

(أ) – ٧٥° (ب) – ١٥° (ج) – ١١٥° (د) – ٢٨٥°

إجابات تمارين على الدرس الأول

(١) $\overleftarrow{\text{و س}}$

(٢) ٢٠°

(٣) – ٢٦٠°

(٤) ١٨٠°

(٥) ٢٢٠°

(٦) الثالث

(٧) الرابع

(٨) الربعية

(٩) $\overleftarrow{\text{و أ}}$

(١٠) $\overleftarrow{\text{و ب}}$

(١١) – ٢٨٥°

وزارة التربية والتعليم
الإدارة المركزية لتطوير المناهج
مكتب مستشار الرياضيات

الدرس الثانى: القياس الستينى والقياس الدائرى لزاوية

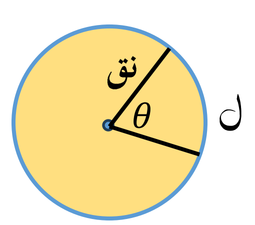
ملخص الدرس:

القياس الستينى للزاوية : يعتمد على تقسيم الدائرة إلى ٣٦٠ قوسًا متساوية في الطول.

- الزاوية المركزية التي ضلعاها يمران بنهايتي قوسين متتاليين يكون قياسها (١°)
- تنقسم الدرجة إلى ٦٠ جزء كلٍ منها يسمى دقيقة (١′)
- تنقسم الدقيقة إلى ٦٠ جزء كلٍ منها يسمى ثانية (١″)

القياس الدائرى للزاوية :

القياس الدائرى لزاوية مركزية في دائرة = $\frac{\text{طول القوس الذى تحصره هذه الزاوية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$



ويرمز لها بالرمز ($\theta^{ء}$) حيث : $\theta^{ء} = \frac{ل}{نق}$

الزاوية النصف قطرية : هي الزاوية المركزية في الدائرة التي تحصر قوسًا طوله يساوى طول نصف قطر هذه الدائرة = ١ء

العلاقة بين القياس الستينى والقياس الدائرى لزاوية :

إذا كان لدينا زاوية قياسها الدائرى $\theta^{ء}$ وقياسها الستينى س° فإن : $\frac{\theta^{ء}}{\pi} = \frac{س^\circ}{١٨٠^\circ}$

مثال محلول (١): أوجد كلًا من القياس الدائري والستيني للزاوية المركزية التي تحصر قوسًا طوله ١٤سم ، في دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم.

الحـــــــــــل

$\theta^{ء} = \frac{١٤}{١٠} = ١,٤$ زاوية نصف قطرية ، $س^\circ = \frac{١,٤ \times ١٨٠^\circ}{\pi} = ٨٠^\circ\ ١٢'\ ٥١''$

تدريب (١): الزاوية التي قياسها $\frac{7\pi}{3}$ قياسها الستينى = ...

(أ) ١٠٥° (ب) ٢١٠° (حـ) ٤٢٠° (ء) ٨٤٠°

تدريب (٢): الزاوية التي قياسها الستينى ٤٨′ ٦٤° قياسها الدائرى = ...

(أ) ٠,١٨ ء (ب) ٠,٣٦ ء (حـ) ٠,١٨ π (ء) ٠,٣٦ π

مثال محلول (٢): طول نصف قطر الدائرة المرسوم بها زاوية مركزية قياسها (١,٢)ء وتحصر قوساً طوله ٤,٨ سم يساوى .... سم

(أ) ١ (ب) ٢ (حـ) ٣ (ء) ٤

الحـــــــــــــل

نق = $\frac{ل}{\theta^{ء}}$ = $\frac{٤,٨}{١,٢}$ = ٤ سم

تدريب (٣): طول القوس المرسوم في دائرة طول نصف قطرها ٤ سم ويقابل زاوية مركزية قياسها (١,٢)ء = ... سم

(أ) ٣,٣ (ب) ٣,٢ (حـ) ٤,٨ (ء) ٥,٢

مثال محلول (٣): اختر الإجابة الصحيحة : الزاوية التي قياسها $\frac{5\pi}{4}$ تقع في الربع ....

(أ) الأول (ب) الثانى (حـ) الثالث (ء) الرابع

الحـــــــــــــل

$\frac{5\pi}{4} = \frac{5 \times 180^\circ}{4} = 225^\circ$ تقع في الربع الثالث

تدريب (٤): اختر الإجابة الصحيحة : الزاوية التي قياسها $\frac{٣\pi}{٤}$ تقع في الربع ....

(أ) الأول (ب) الثانى (حـ) الثالث (ء) الرابع

مثال محلول (٤): اختر الإجابة الصحيحة :

طول القوس المرسوم في دائرة طول نصف قطرها ٦ سم ويقابل زاوية مركزية قياسها °٦٠

يساوى .... سم

(أ) π (ب) ٢ π (حـ) ٣٦٠ (ء) ١٨٠

الحـــــــل

ل = θء × نق = $\frac{°٦٠ \times \pi}{°١٨٠}$ × ٦ = ٢ π سم

تدريب (٥): اختر الإجابة الصحيحة :

قياس الزاوية المركزية التي تحصر قوساً طوله ٢ π سم في دائرة طول نصف قطرها ٦ سم يساوى ......°

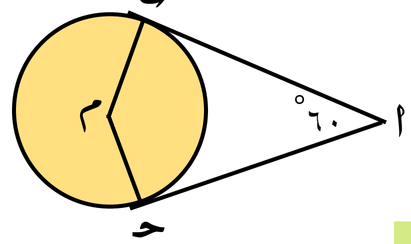
(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (حـ) ٩٠ (ء) ١٨٠

مثال محلول (٥): في الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ قطعتان مماسان للدائرة م والتي طول

قطرها ٦ سم ، ق(∠ أ) = °٦٠

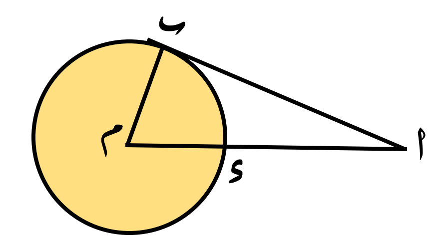
أوجد : طول $\overset{\frown}{بحـ}$



الحـــــــل

ق(∠ب) = ق(∠حـ) = °٩٠ ⟸ ق(∠ب) = °١٢٠

ل = θء × نق = $\frac{°١٢٠ \times \pi}{°١٨٠}$ × ٣ = ٢ π سم



تدريب (٦): في الشكل المقابل :

$\overline{\text{أب}}$ قطعة مماسة للدائرة م والتي طول نصف قطرها ٤ سم ، طول $\overset{\frown}{\text{بء}}$ = π سم

أوجد : ق(∠ ء م ب) بالتقدير الستيني

اجابات التدريبات

تدريب (١): °٤٢٠

تدريب (٢): ٠,٣٦ π

تدريب (٣): ٤,٨

تدريب (٤): الثانى

تدريب (٥): ٦٠

تدريب (٦): °٤٥

تمارين على الدرس الثانى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) 90° = (....)^{ء}

(أ) π (ب) ٢ π (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) $\frac{\pi}{٤}$

(٢) ($\frac{\pi}{٢}$)^{ء} = ...$^\circ$

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٩٠ (د) ١٨٠

(٣) الزاوية التي قياسها $\frac{٤\pi}{٣}$ تقع في الربع ....

(أ) الأول (ب) الثانى (جـ) الثالث (د) الرابع

(٤) أ ب حـ مثلث فيه ق(∠ أ) = ٦٠$^\circ$ ، ق(∠ أ) = $\frac{\pi}{٤}$ فإن : ق(∠ حـ) = (....)^{ء}

(أ) $\frac{\pi}{١٢}$ (ب) $\frac{٩\pi}{١٢}$ (جـ) $\frac{٧\pi}{١٢}$ (د) $\frac{٥\pi}{١٢}$

(٥) الزاوية التي قياسها (− ١,٤)^{ء} تقع في الربع ....

(أ) الأول (ب) الثانى (جـ) الثالث (د) الرابع

(٦) طول القوس المرسوم في دائرة طول نصف قطرها ٩سم ، وقياس زاويته المركزية ١٥٠$^\circ$ يساوى ...... سم

(أ) ٧,٥ π (ب) ٢٢ (جـ) ١٢,٦ (د) ١٣,٥ π

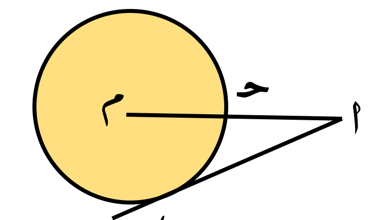
(٧) قياس الزاوية المركزية التي تحصر قوساً طوله ٤ سم ، ومرسومة في دائرة طول نصف قطرها ٦سم ≃ .....$^\circ$

(أ) ٣٢ (ب) ٣٨ (جـ) ٤٨ (د) ٦٨

(٨) طول قطر الدائرة المرسوم بها قوس طوله $\frac{٢\pi}{٣}$ سم ويحصر زاوية مركزية قياسها ٣٠$^\circ$ = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٢

(٩) <u>في الشكل المقابل</u> :

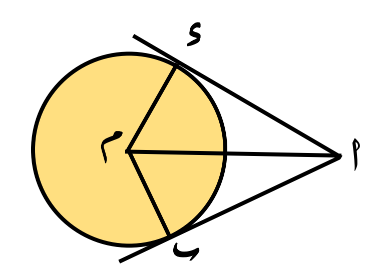


$\overline{\text{أب}}$ قطعة مماسة للدائرة م فإذا كان :

م ب = ١٢ سم ، أ م = ٢٤ سم

أوجد : طول $\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$

(١٠) <u>في الشكل المقابل</u> :



$\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أء}}$ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، ء

ق(∠ب أ م) = ٣٠° ، م ب = ٣ سم

أوجد : طول $\overset{\frown}{\text{ب ء}}$ الأكبر

اجابات تمارين على الدرس الثانى

(١) $\frac{\pi}{٢}$

(٢) ٩٠

(٣) الثالث

(٤) $\frac{٥\pi}{١٢}$

(٥) الرابع

(٦) ٧,٥ π

(٧) ٣٨

(٨) ٨

(٩) ٤ π

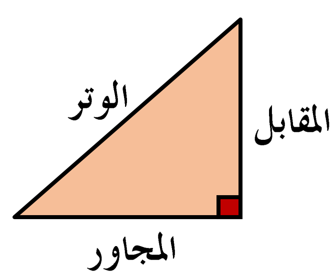
(١٠) ٢ π

الدرس الثالث: الدوال المثلثية

تذكر أن :

جاθ = $\dfrac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\dfrac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}}$

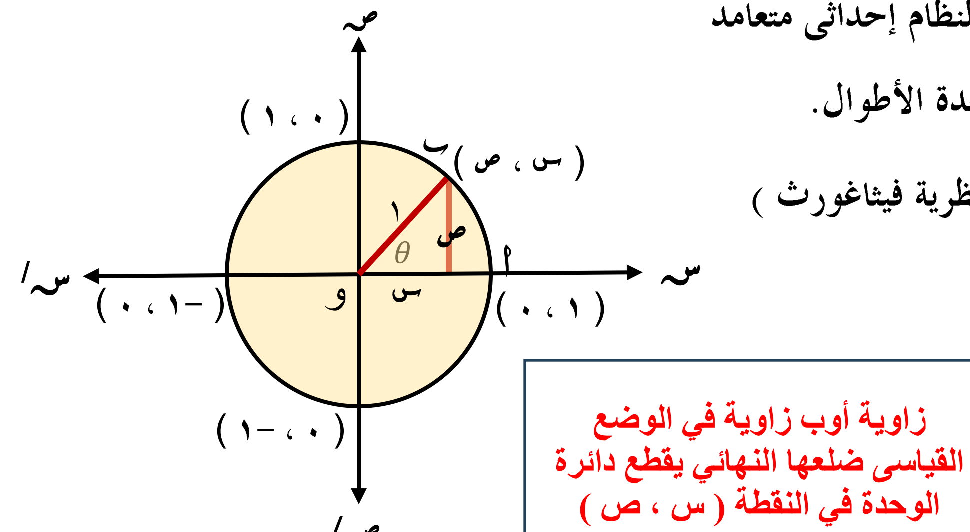
جتاθ = $\dfrac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\dfrac{\text{حـ ب}}{\text{أ حـ}}$ ، ظاθ = $\dfrac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\dfrac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}}$



دائرة الوحدة:

هي دائرة مركزها نقطة الأصل لنظام إحداثى متعامد وطول نصف قطرها يساوى وحدة الأطوال.

- س^2 + ص^2 = ١ (نظرية فيثاغورث)
- جاθ = ص
- جتاθ = س
- ظاθ = $\dfrac{\text{ص}}{\text{س}}$



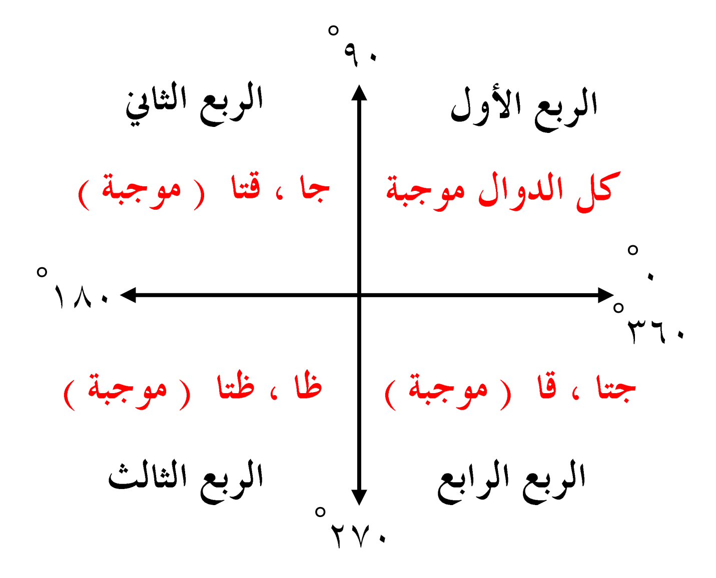
مقلوبات الدوال المثلثية :

قاθ = $\dfrac{1}{\text{جتا}\,\theta}$ = $\dfrac{1}{\text{س}}$ ، س $\neq$ صفر

قتاθ = $\dfrac{1}{\text{جا}\,\theta}$ = $\dfrac{1}{\text{ص}}$ ، ص $\neq$ صفر

ظتاθ = $\dfrac{1}{\text{ظا}\,\theta}$ = $\dfrac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}$ = $\dfrac{\text{س}}{\text{ص}}$ ، ص $\neq$ صفر

إشارات الدوال المثلثية :



مثال محلول (١): عين إشارات كل من النسب المثلثية الآتية :

(أ) ظتا ١٠٠° (ب) جا ١٩٠° (حـ) قا ٨٠٠° (ء) ظا −٧٠°

الحـــــــــــــل

(أ) ظتا ١٠٠° (سالبة) (ب) جا ١٩٠° (سالبة)

(حـ) قا ٨٠٠° = قا ٨٠° (موجبة) (ء) ظا −٧٠° = ظا ٢٩٠° (سالبة)

تدريب (١): عين إشارات كل من النسب المثلثية الآتية :

(أ) جا ٣٠٠° (ب) قا ١٢٠° (حـ) ظتا ٦٠٠° (ء) جتا −٢٠٠°

مثال محلول (٢): إذا كانت ∠ أ و ب في وضعها القياسى وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب وقياسها θ . أوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية أ و ب إذا كان إحداثيا نقطة ب :

(أ) (−١ ، ٠) (ب) (س ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$) (حـ) (س ، −س) حيث : س > ٠ ، ص > ٠

الحـــــــــــــل

(أ) (−١ ، ٠)

جاθ = صفر ، جتاθ = −١ ، ظاθ = $\frac{٠}{-١}$ = صفر

(ب) (س ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$)

س^{٢} + ص^{٢} = ١

س^{٢} + $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢}$ = ١ ⟸ س^{٢} = $\frac{١}{٢}$ ⟸ س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

جاθ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جتاθ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ظاθ = ١

(حـ) (س ، −س)

س^{٢} + ص^{٢} = ١

س^{٢} + (−س)^{٢} = ١ ⟸ ٢س^{٢} = ١

س^{٢} = $\frac{١}{٢}$ ⟸ س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

جاθ = − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جتاθ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ظاθ = −١

تدريب (٢):

إذا كانت ∠ أ و ب في وضعها القياسى وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب

وقياسها θ . أوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية أ و ب إذا كان إحداثيا نقطة ب :

(أ) ($\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{-٤}{٥}$) (ب) ($\frac{١}{٢}$ ، ص) (حـ) (−س ، ٢س) حيث : س > ٠ ، ص > ٠

مثال محلول (٣): إذا كانت : : ٩٠° > θ > ١٨٠° وكان : جاθ = $\frac{١٢}{١٣}$

فأوجد جميع النسب المثلثية للزاوية θ

الحـــــــــــــــل

$س^٢ + ص^٢ = ١$ (جاθ = ص = $\frac{١٢}{١٣}$)

$س^٢ + \left(\frac{١٢}{١٣}\right)^٢ = ١$ ⟵ $س^٢ = ١ - \frac{١٤٤}{١٦٩} = \frac{٢٥}{١٦٩}$

$س = \frac{-٥}{١٣}$ (لأن θ تقع في الربع الثانى)

جاθ = $\frac{١٢}{١٣}$ ، جتاθ = $\frac{-٥}{١٣}$ ، ظاθ = $\frac{-١٢}{٥}$

قتاθ = $\frac{١٣}{١٢}$ ، قاθ = $\frac{-١٣}{٥}$ ، ظتاθ = $\frac{-٥}{١٢}$

تدريب (٣): إذا كانت : $°١٨٠ < \theta < °٢٧٠$ وكان : جتاθ = $\frac{-٣}{٥}$

فأوجد جميع النسب المثلثية للزاوية θ

الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة :

قياس الزاوية بالتقدير الستينى	قياس الزاوية بالتقدير الدائرى	جاθ	جتاθ	ظاθ	قتاθ	قاθ	ظتاθ
°٠	٠	٠	١	٠	غير معرف	١	غير معرف
°٣٦٠	٢ π	٠	١	٠	غير معرف	١	غير معرف
°٩٠	π / ٢	١	٠	غير معرف	١	غير معرف	٠
°١٨٠	π	٠	-١	٠	غير معرف	-١	غير معرف
°٢٧٠	٣ π / ٢	-١	٠	غير معرف	-١	غير معرف	٠

مثال محلول (٤): بدون إستخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة : ٣ جا ٣٠° جا ٩٠° − جتا ٠° قا ٦٠° + ظا ٤٥°

الحـــــــــــــــل

المقدار $= ٣ \times \frac{١}{٢} \times ١ - ١ \times ٢ + ١ = \frac{١}{٢}$

تدريب (٤): بدون إستخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة : جتا^{٢} ٤٥° جا ٩٠° − ظا ٦٠° جا ٣٦٠° + جا ٣٠°

مثال محلول (٥): أثبت صحة المتساوية الآتية : ٣جتا ٦٠° جتا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$ = جتا^{٢} ٣٠° جا $\frac{\pi}{٢}$

الحـــــــــــــــل

الطرف الأيمن $= ٣ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٤}$

الطرف الأيسر $= \frac{٣}{٤} \times ١ = \frac{٣}{٤}$ الطرفان متساويان

تدريب (٥): أوجد قيمة س التي تجعل المتساوية الآتية صحيحة :

س جا^{٢} ٣٠° قا^{٢} ٤٥° = ظا^{٢} ٦٠° − ٢جتا ٣٦٠°

اجابات التدريبات

تدريب (١): (أ) (سالبة) (ب) (سالبة) (حـ) (موجبة) (ى) (سالبة)

تدريب (٢): (أ) جا$\theta = \frac{-٤}{٥}$ ، جتا$\theta = \frac{٣}{٥}$ ، ظا$\theta = \frac{-٤}{٣}$

(ب) جا$\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جتا$\theta = \frac{١}{٢}$ ، ظا$\theta = \sqrt{٣}$ (حـ) جا$\theta = \frac{٢}{\sqrt{٥}}$ ، جتا$\theta = \frac{-١}{\sqrt{٥}}$ ، ظا$\theta = -٢$

تدريب (٣): جا$\theta = \frac{-٤}{٥}$ ، جتا$\theta = \frac{-٣}{٥}$ ، ظا$\theta = \frac{٤}{٣}$ ، قتا$\theta = \frac{-٥}{٤}$ ، قا$\theta = \frac{-٥}{٣}$ ، ظتا$\theta = \frac{٣}{٤}$

تدريب (٤): ١ **تدريب (٥):** س = ٢

تمارين على الدرس الثالث

أولًا : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان جاθ سالبة ، جتاθ موجبة فإن : θ تقع في الربع ....

(أ) الأول (ب) الثانى (حـ) الثالث (ى) الرابع

(٢) إذا كانت θ قياس زاوية في الوضع القياسى وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $\left(\frac{-\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$

فإن : ظاθ = ...

(أ) $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (حـ) $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$ (ى) $-\sqrt{٣}$

(٣) إذا كانت θ قياس زاوية في الوضع القياسى وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $\left(\frac{-\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$

فإن : قتاθ = ...

(أ) $\sqrt{٢}$ (ب) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (حـ) $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ (ى) $-\sqrt{٢}$

(٤) إذا كان : جاθ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ وكانت θ زاوية حادة فإن : θ = ...$^\circ$

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (حـ) ٦٠ (ى) ٩٠

(٥) إذا كان : قاθ = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ وكانت θ زاوية حادة فإن : θ = ...$^\circ$

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (حـ) ٦٠ (ى) ٩٠

(٦) إذا كانت θ قياس زاوية في الوضع القياسى وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $\left(\frac{٣}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$

فإن : جاθ − جتاθ = ...

(أ) $\frac{٧}{٥}$ (ب) $\frac{١}{٥}$ (حـ) $\frac{-١}{٥}$ (ى) −١

(٧) إذا كان : جاθ = −١ ، جتاθ = ٠ فإن : θ = ... °

(أ) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) π (حـ) $\frac{٣\pi}{٢}$ (د) ٢ π

(٨) إذا كانت الزاوية θ تقع في الربع الثالث فإن : ظاθ جاθ ....

(أ) تساوى صفر (ب) أكبر من صفر (حـ) أصغر من صفر (د) لايمكن التحديد

(٩) ٢ جا٦٠° ظا٣٠° = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$ (حـ) $\sqrt{٣}$ (د) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

(١٠) إذا كانت θ قياس زاوية في الوضع القياسى وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة ($\frac{١}{٢}$ ، ص)

فإن : جاθ = ...

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (حـ) $\frac{-١}{٢}$ (د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ثانيًا : أجب عن الأسئلة الآتية :

(١١) أوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية قياسها θ مرسومة في الوضع القياسى وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة : (أ) ($\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{\sqrt{٥}}{٣}$) (ب) ($\frac{-٣}{٢}$ أ ، ٢ أ) ، أ > صفر

(١٢) أوجد قيمة كل مما يأتي :

(أ) جا ١٨٠° جتا ٤٥° − جتا ١٨٠° جا ٤٥°

(ب) جا ٣٠° قا ٦٠° − جتا ٤٥° قا $\frac{\pi}{٤}$

(١٣) أثبت أن : ظا٤٥° − جا٦٠° جتا ٣٠° = جا^{٢} $\frac{\pi}{٦}$

اجابات تمارين على الدرس الثالث

(١) الرابع

(٢) $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$

(٣) $-\sqrt{٢}$

(٤) ٦٠°

(٥) ٣٠°

(٦) $\frac{١}{٥}$

(٧) $\frac{٣\pi}{٢}$

(٨) أصغر من صفر

(٩) ١

(١٠) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(١١) (أ) جا$\theta = \frac{\sqrt{٥}}{٣}$ ، جتا$\theta = \frac{٢}{٣}$ ، ظا$\theta = \frac{\sqrt{٥}}{٢}$

قتا$\theta = \frac{٣}{\sqrt{٥}}$ ، قا$\theta = \frac{٣}{٢}$ ، ظتا$\theta = \frac{٢}{\sqrt{٥}}$

(ب) جا$\theta = \frac{٤}{٥}$ ، جتا$\theta = \frac{-٣}{٥}$ ، ظا$\theta = \frac{-٤}{٣}$

قتا$\theta = \frac{٥}{٤}$ ، قا$\theta = \frac{-٥}{٣}$ ، ظتا$\theta = \frac{-٣}{٤}$

(١٢) (أ) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (ب) صفر

الدرس الرابع: الزوايا المنتسبة

الدوال المثلثية لأى زاويتين قياسيهما : (θ ، ١٨٠° $\pm$ θ) ، (θ ، ٣٦٠° $\pm$ θ)

(س، ص)

جاθ = ص

جتاθ = س

ظاθ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

(ـ س، ص)

(١٨٠° ـ θ)

إنعكاس في محور الصادات

جا (١٨٠° ـ θ) = جاθ

جتا (١٨٠° ـ θ) = ـ جتاθ

ظا (١٨٠° ـ θ) = ـ ظاθ

(ـ س، ـ ص)

(١٨٠° + θ)

إنعكاس في نقطة الأصل

جا (١٨٠° + θ) = ـ جاθ

جتا (١٨٠° + θ) = ـ جتاθ

ظا (١٨٠° + θ) = ظاθ

(س ، ـ ص)

(٣٦٠° ـ θ)

(ـ θ)

إنعكاس في محور السينات

جا (ـ θ) = ـ جاθ

جتا (ـ θ) = جتاθ

ظا (ـ θ) = ـ ظاθ

جا (٣٦٠° ـ θ) = ـ جاθ

جتا (٣٦٠° ـ θ) = جتاθ

ظا (٣٦٠° ـ θ) = ـ ظاθ

ملاحظة :

جا (٣٦٠° + θ) = جاθ

جتا (٣٦٠° + θ) = جتاθ

ظا (٣٦٠° + θ) = ظاθ

مثال محلول (١): بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة :

(أ) جا ١٥٠° (ب) جتا ١٢٠° (حـ) ظتا ٢١٠° (ء) جتا ٣٠٠° (هـ) قتا ٣٣٠°

الحـــــــــــــل

(أ) جا ١٥٠° = جا (١٨٠° − ٣٠°) = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

(ب) جتا ١٢٠° = جتا (١٨٠° − ٦٠°) = − جتا ٦٠° = − $\frac{١}{٢}$

(حـ) ظتا ٢١٠° = ظتا (١٨٠° + ٣٠°) = ظتا ٣٠° = $\sqrt{٣}$

(ء) جتا ٣٠٠° = جتا (٣٦٠° − ٦٠°) = جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

(هـ) قتا ٣٣٠° = قتا (٣٦٠° − ٣٠°) = − قتا ٣٠° = −٢

تدريب (١): بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة :

(أ) جا ٢٢٥° (ب) جتا ٢١٠° (حـ) قا ٦٠٠° (ء) ظتا ٢٢٥°

مثال محلول (٢): بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة :

(أ) جا (− ٤٥°) (ب) جتا (− ٦٠°) (حـ) ظتا (− ٣٠°) (ء) جتا ٦٩٠°

الحـــــــــــــل

(أ) جا (− ٤٥°) = − جا ٤٥° = − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

(ب) جتا (− ٦٠°) = جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

(حـ) ظتا (− ٣٠°) = − ظتا ٣٠° = − $\sqrt{٣}$

(ء) جتا ٦٩٠° = جتا ٣٣٠° = جتا (٣٦٠° − ٣٠°) = جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

تدريب (٢): بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة :

(أ) جا (-30°) (ب) جتا (-45°) (حـ) ظتا (-60°) (ء) جتا 750°

مثال محلول (٣): إذا كان : جا $\theta = \frac{4}{5}$ فإن : جا $(180^\circ + \theta) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(أ) $\frac{4}{5}$ (ب) $\frac{3}{5}$ (حـ) $\frac{-3}{5}$ (ء) $\frac{-4}{5}$

الحــــــــــل

جا $(180^\circ + \theta) = -$ جا $\theta = -\frac{4}{5}$

تدريب (٣): جتا θ + جتا $(180^\circ - \theta) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(أ) صفر (ب) ١ (حـ) ٢ جتا θ (ء) جتا θ

مثال محلول (٤): إذا كان : جتا $\theta = -\frac{1}{2}$ ، θ قياس أصغر زاوية موجبة فإن : $\theta = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(أ) 60° (ب) 120° (حـ) 240° (ء) 300°

الحــــــــــل

120°

تدريب (٤): إذا كان : جا $(90^\circ - \theta) = \frac{1}{2}$ ، θ قياس أكبر زاوية موجبة فإن : $\theta = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(أ) 30° (ب) 150° (حـ) 210° (ء) 330°

الدوال المثلثية لأى زاويتين قياسيهما : $(\theta ، ٩٠^\circ \pm \theta)$ ، $(\theta ، ٢٧٠^\circ \pm \theta)$

جا $(٩٠^\circ - \theta)$ = جتاθ
جتا $(٩٠^\circ - \theta)$ = جاθ
ظا $(٩٠^\circ - \theta)$ = ظتاθ

جا $(٩٠^\circ + \theta)$ = جتاθ
جتا $(٩٠^\circ + \theta)$ = − جاθ
ظا $(٩٠^\circ + \theta)$ = − ظتاθ

جا $(٢٧٠^\circ - \theta)$ = − جتاθ
جتا $(٢٧٠^\circ - \theta)$ = − جاθ
ظا $(٢٧٠^\circ - \theta)$ = ظتاθ

جا $(٢٧٠^\circ + \theta)$ = − جتاθ
جتا $(٢٧٠^\circ + \theta)$ = جاθ
ظا $(٢٧٠^\circ + \theta)$ = − ظتاθ

مثال محلول (٥): بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة :

(أ) جا ١٥٠° (ب) جتا ١٢٠° (حـ) ظتا ٢١٠° (ء) جتا ٣٠٠° (هـ) قتا ٣٣٠°

الحـــــــــل

(أ) جا ١٥٠° = جا $(٩٠^\circ + ٦٠^\circ)$ = جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

(ب) جتا ١٢٠° = جتا $(٩٠^\circ + ٣٠^\circ)$ = − جا ٣٠° = $-\frac{١}{٢}$

(حـ) ظتا ٢١٠° = ظتا $(٢٧٠^\circ - ٦٠^\circ)$ = ظا ٦٠° = $\sqrt{٣}$

(ء) جتا ٣٠٠° = جتا $(٢٧٠^\circ + ٣٠^\circ)$ = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

(هـ) قتا ٣٣٠° = قتا $(٢٧٠^\circ + ٦٠^\circ)$ = − قا ٦٠° = −٢

تدريب (٥): بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة :

باستخدام الزاويتين (θ ، ٩٠° $\pm$ θ) ، (θ ، ٢٧٠° $\pm$ θ)

(أ) جا ١٥٠°　　(ب) جتا ٣١٥°　　(حـ) قا ٦٠٠°　　(ء) ظتا ٢٢٥°

مثال محلول (٦): إذا كان : ٥ جتا (٩٠° − θ) = ٣ ، ٠° < θ < ٩٠° فإن : جا θ = ...

(أ) $\frac{٥}{٤}$　　(ب) $\frac{٣}{٥}$　　(حـ) $\frac{-٣}{٥}$　　(ء) $\frac{٤}{٥}$

الحـــــــــــل

٥ جتا (٩٠° − θ) = ٣

جتا (٩٠° − θ) = $\frac{٣}{٥}$ ⟸ جا θ = $\frac{٣}{٥}$

تدريب (٦): إذا كان : ١٣ جا θ − ١٢ = ٠ ، ٩٠° < θ < ١٨٠°

فإن قيمة : جا (٢٧٠° − θ) × قا (٩٠° + θ) = ...

(أ) $\frac{٥}{١٢}$　　(ب) $\frac{١٢}{٥}$　　(حـ) $\frac{-١٢}{٥}$　　(ء) $\frac{-٥}{١٢}$

مثال محلول (٧): إذا كان (س ، − $\frac{١}{٢}$) نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية قياسها θ في وضعها القياسى مع دائرة الوحدة حيث : ١٨٠° < θ < ٢٧٠°

فإن : ظتا (٩٠° − θ) جا θ = ...

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$　　(ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٦}$　　(حـ) − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$　　(ء) − $\frac{\sqrt{٣}}{٦}$

الحـــــــــــل

س^{٢} + $\frac{١}{٤}$ = ١ ⟸ س^{٢} = $\frac{٣}{٤}$ ⟸ س = − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ظتا (٩٠° − θ) جا θ = ظا θ × جا θ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ × − $\frac{١}{٢}$ = − $\frac{\sqrt{٣}}{٦}$

تدريب (٧): إذا كان الضلع النهائى لزاوية قياسها θ في وضعها القياسى يقطع دائرة الوحدة في النقطة $\left(\frac{-٣}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$ فإن : ظتا $\left(\frac{٣\pi}{٢} - \theta\right) =$ ....

(أ) $\frac{٤}{٥}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{-٣}{٥}$ (د) $\frac{-٤}{٣}$

الحل العام للمعادلات المثلثية :

(١) إذا كان : جا α = جتا β فإن : $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{٢} + ٢ن\pi$ حيث : ن $\in$ ص

(٢) إذا كان : قا α = قتا β فإن : $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{٢} + ٢ن\pi$ حيث : ن $\in$ ص

$\alpha \neq ن\pi$ ، $\beta \neq (٢ن + ١)\frac{\pi}{٢}$

(٣) إذا كان : ظا α = ظتا β فإن : $\alpha + \beta = \frac{\pi}{٢} + ن\pi$ حيث : ن $\in$ ص

$\alpha \neq (٢ن + ١)\frac{\pi}{٢}$ ، $\beta \neq ن\pi$

مثال محلول (٨): أوجد الحل العام للمعادلة : جا ٣θ = جتا θ ، ثم أوجد قيم θ حيث : $\theta \in$] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [

الحـــــــــــل

$٣\theta + \theta = \frac{\pi}{٢} + ٢ن\pi$ $٣\theta - \theta = \frac{\pi}{٢} + ٢ن\pi$

$٤\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢ن\pi$ $٢\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢ن\pi$

$\theta = \frac{\pi}{٨} + \frac{١}{٢}ن\pi$ $\theta = \frac{\pi}{٤} + ن\pi$

الحل العام هو : $\frac{\pi}{٨} + \frac{١}{٢}ن\pi$ ، $\frac{\pi}{٤} + ن\pi$ حيث : ن $\in$ ص

عند ن = ٠ $\therefore \theta = \frac{\pi}{٨} = ٢٢,٥^\circ$ أو $\theta = \frac{\pi}{٤} = ٤٥^\circ$

تدريب (٨): أوجد الحل العام للمعادلة : قا ٢ θ = قتا θ

مثال محلول (٩): أوجد الحل العام للمعادلة : ظا θ = ظتا θ

الحـــــــــــــل

$$\theta + \theta = \frac{\pi}{٢} + ن\, \pi$$

$$٢\,\theta = \frac{\pi}{٢} + ن\, \pi$$

$$\theta = \frac{\pi}{٤} + \frac{١}{٢} ن\, \pi$$

الحل العام هو : $\frac{\pi}{٤} + \frac{١}{٢} ن\, \pi$ حيث : ن $\in$ ص

تدريب (٩): أوجد الحل العام للمعادلة : ظا θ = ظتا ٢ θ

مثال محلول (١٠): أوجد إحدى قيم θ حيث : $٠^\circ < \theta < ٩٠^\circ$ التي تحقق :

جا (٣ θ + ١٥°) = جتا (٢ θ − ٥°)

الحـــــــــــــل

$$٣\,\theta + ١٥^\circ + ٢\,\theta - ٥^\circ = ٩٠^\circ$$

$$٥\,\theta + ١٠^\circ = ٩٠^\circ$$

$$٥\,\theta = ٨٠^\circ$$

$$\theta = ١٦^\circ$$

تدريب (١٠): أوجد إحدى قيم θ حيث : $٠^\circ < \theta < ٩٠^\circ$ التي تحقق :

ظا (θ + ٢٠°) = ظتا (٣ θ + ٣٠°)

اجابات التدريبات

تدريب (١): (أ) $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (ب) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (حـ) -٢ (ء) ١

تدريب (٢): (أ) $-\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (حـ) $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (ء) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

تدريب (٣): صفر

تدريب (٤): ١٥٠°

تدريب (٥): (أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (حـ) -٢ (ء) ١

تدريب (٦): $\frac{-٥}{١٢}$

تدريب (٧): $\frac{-٤}{٣}$

تدريب (٨): الحل العام هو : $\frac{\pi}{٦} + \frac{٢}{٣}$ ن π ، $\frac{\pi}{٢} + ٢$ ن π حيث : ن $\in$ ص

تدريب (٩): الحل العام هو : $\frac{\pi}{٦} + \frac{٢}{٣}$ ن π حيث : ن $\in$ ص

تدريب (١٠): ١٠°

تمارين على الدرس الرابع

أولًا : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $\frac{\text{قا } ١٨^\circ}{\text{قتا } ٧٢^\circ}$ = ...

(أ) ظا٤٥° (ب) ظتا٧٢° (حـ) ظا٧٢° (ى) ظا٩٠°

(٢) إذا كان : جا (١٨٠° − θ) = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ حيث : θ أصغر قياس موجب فإن θ = ...

(أ) ٤٥° (ب) ٣٠° (حـ) ٦٠° (ى) ١٢٠°

(٣) إذا كان : جا θ = $\frac{٣}{٥}$ فإن : جا (٢٧٠° + θ) = ...

(أ) − $\frac{٤}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (حـ) $\frac{٣}{٥}$ (ى) − $\frac{٣}{٥}$

(٤) ظا (٩٠° − θ) × قتا (٩٠° + θ) = ...

(أ) ظتا θ (ب) قا θ (حـ) قتا θ (ى) جتا θ

(٥) إذا كان : $\alpha + \beta$ = ٩٠° وكان : ظا α = $\frac{١}{٢}$ فإن : ظا β = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢ (حـ) ١ (ى) غير معرف

(٦) جتا θ − جتا (١٨٠° − θ) = ...

(أ) صفر (ب) جتا θ + جا θ (حـ) ٢ جتا θ (ى) ٢ جا θ

(٧) إذا كان : −٢جتا θ = $\sqrt{٣}$ حيث : θ أصغر قياس موجب فإن θ = ...

(أ) ١٥٠° (ب) ٣٠° (حـ) ٢١٠° (ى) ٣٣٠°

(٨) إذا كان : جا (θ − ١٨٠°) = ٢جتا θ حيث : θ أصغر قياس موجب فإن : ظا θ = ...

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ (ب) $\sqrt{٣}$ (حـ) ١ (ى) غير معرف

(٩) الحل العام للمعادلة : ظا θ = ظتا٢ θ هو .... حيث : ن ∈ ص

(أ) $\frac{\pi}{6} + \pi$ ن (ب) $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}$ ن (حـ) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}$ ن (ء) $\frac{\pi}{6} + 2\pi$ ن

(١٠) الحل العام للمعادلة : جا θ = جتا(θ + ٣٠°) هو .... حيث : ن ∈ ص

(أ) $\frac{\pi}{6} + \pi$ ن (ب) $\frac{\pi}{6} + 2\pi$ ن (حـ) $\frac{\pi}{3} + \pi$ ن (ء) $\frac{\pi}{3} + 2\pi$ ن

(١١) أثبت أن : جا٦٠٠° جتا(– ٣٠°) + جا ١٥٠° جتا(– ٢٤٠°) = –١

(١٢) إذا كان : جا θ = $\frac{2}{\sqrt{5}}$ حيث : زاوية θ هي أصغر قياس موجب فاوجد قيمة كل من :

(أ) جتا θ (ب) جا(١٨٠° + θ) (حـ) جتا(١٨٠° – θ)

(ء) ظا(٢٧٠° – θ) (هـ) جا (– θ)

(١٣) إذا كان θ هي قياس زاوية موجهة في وضع قياسي وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة :

(س ، $\frac{1}{3}$) حيث : ٠° $< \theta <$ ٩٠° فاوجد قيمة كل من :

(أ) جتا θ (ب) ظا(٩٠° – θ) (حـ) قتا(١٨٠° – θ) (ء) قا(٢٧٠° + θ)

(١٤) إذا كان : ٥جتا θ + ٣ = ٠ حيث : ٩٠° $< \theta <$ ١٨٠° فاوجد قيمة كل من :

(أ) جا (١٨٠° – θ) (ب) ظا(١٨٠° + θ) (حـ) جتا(٩٠° + θ) (ء) ظتا(٣٦٠° – θ)

(١٥) أوجد قيمة θ حيث : ٠° $< \theta <$ ٩٠° والتي تحقق كل مما يأتى :

(أ) جا (٣ θ + ١٥°) = جتا (٢ θ – ٥°)

(ب) ظا (θ + ٢٠°) = ظتا (٣ θ + ٣٠°)

(١٦) أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية حيث : θ ∈ [٠ ، ٢ π]

(أ) ٢جا θ + ١ = ٠ (ب) جتا θ + ١ = ٠ (حـ) قتا θ – $\sqrt{2}$ = ٠

إجابات تمارين على الدرس الرابع

(١) ظا٤٥°

(٢) ٦٠°

(٣) $-\frac{٤}{٥}$

(٤) قتا θ

(٥) ٢

(٦) ٢ جتا θ

(٧) ١٥٠°

(٨) غير معرف

(٩) $\frac{\pi}{٦} + \frac{\pi}{٣}$ ن

(١٠) $\frac{\pi}{٦} + \pi$ ن

(١١) الأيمن = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢} \times -\frac{١}{٢} = -١$ = الأيسر

(١٢) (أ) $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ (ب) $-\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ (جـ) $-\frac{١}{\sqrt{٥}}$ (د) ٢ (هـ) $-\frac{٢}{\sqrt{٥}}$

(١٣) (أ) $\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$ (ب) $٢\sqrt{٢}$ (جـ) ٣ (د) ٣

(١٤) (أ) $\frac{٤}{٥}$ (ب) $-\frac{٤}{٣}$ (جـ) $-\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

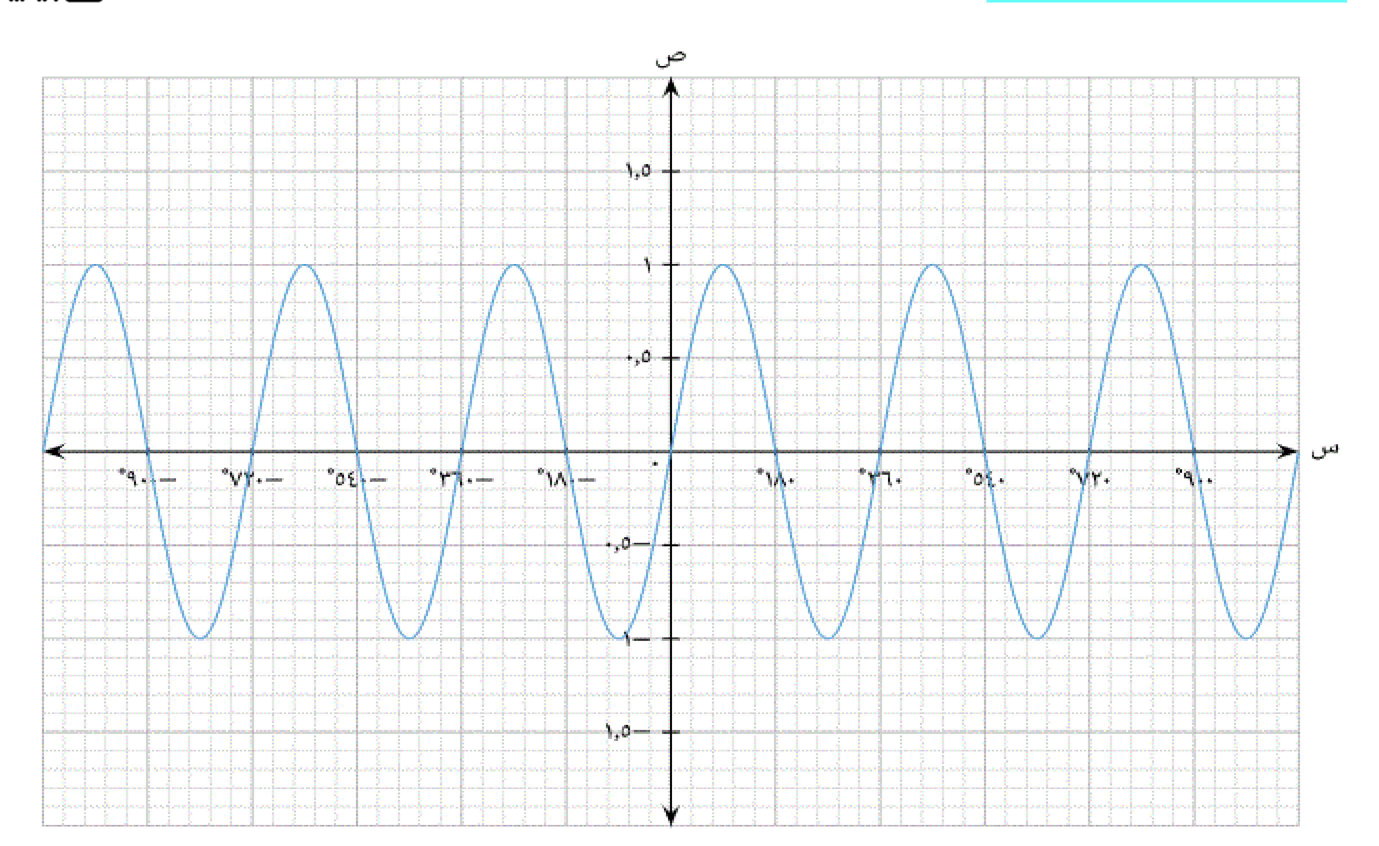
(١٥) (أ) ١٦° أو ٧٠° أو ٨٨° (ب) ١٠° أو ٥٥°

(١٦) (أ) مجموعة الحل = { ٢١٠°، ٣٣٠° } (ب) مجموعة الحل = { ١٨٠° }

(جـ) مجموعة الحل = { ٤٥°، ١٣٥° }

الدرس الخامس: التمثيل البيانى للدوال المثلثية

التمثيل البيانى لدالة الجيب : د(θ) = جا θ



خواص دالة الجيب :

(١) المجال =] – ∞ ، ∞ [

(٢) المدى = [–١ ، ١]

(٣) الدالة دورية ودورتها = ٢ π

(٤) القيمة العظمى للدالة = ١

(٥) القيمة الصغرى للدالة = –١

التمثيل البيانى لدالة جيب التمام : د(θ) = جتا θ

خواص دالة الجيب :

(١) المجال =] − ∞ ، ∞ [

(٢) المدى = [−١ ، ١]

(٣) الدالة دورية ودورها = ٢ π

(٤) القيمة العظمى للدالة = ١

(٥) القيمة الصغرى للدالة = −١

مثال محلول (١): اختر الإجابة الصحيحة :

إذا كان : د(θ) = ٣جتا٢ θ فإن : مدى الدالة د هو ....

(أ) [−٣ ، ٣] (ب) [−٢ ، ٢] (حـ) [−٦ ، ٦] (ء) [−١ ، ١]

الحـــــــــل

−١ ≤ جتا٢ θ ≤ ١ بالضرب × ٣

−٣ ≤ ٣جتا٢ θ ≤ ٣ المدى = [−٣ ، ٣]

تدريب (١): اختر الإجابة الصحيحة :

إذا كان : د(θ) = ٢جا٣θ فإن : القيمة الصغرى للدالة د = ...

(أ) −١ (ب) −٢ (حـ) −٣ (ء) −٦

مثال محلول (٢): اختر الإجابة الصحيحة :

إذا كان : د(θ) = ١ + جا(−٤ θ) فإن : القيمة العظمى للدالة د = ...

(أ) −٤ (ب) −٣ (حـ) ١ (ء) ٢

الحـــــــــل

−١ + ١ ≤ ١ + جا(−٤ θ) ≤ ١ + ١

صفر ≤ ١ + جا(−٤ θ) ≤ ٢ القيمة العظمى للدالة د = ٢

تدريب (٢): اختر الإجابة الصحيحة :

إذا كان : د(θ) = ٣ + جا٢ θ فإن : القيمة الصغرى للدالة د = ...

(أ) −٥ (ب) −٢ (حـ) ٢ (ء) ١

مثال محلول (٣): اختر الإجابة الصحيحة :

الدالة د : د(θ) = ٢جا٣θ دالة دورية ودورها = ...

(أ) $\frac{٢\pi}{٣}$ (ب) π (حـ) $\frac{\pi}{٢}$ (ء) $\frac{\pi}{٣}$

الحـــــــــــل

٣θ = ٢ π

θ = $\frac{٢\pi}{٣}$

تدريب (٣): اختر الإجابة الصحيحة :

الدالة د : د(θ) = ٢جتا٤θ دالة دورية ودورها = ...

(أ) $\frac{٢\pi}{٣}$ (ب) π (حـ) $\frac{\pi}{٢}$ (ء) $\frac{\pi}{٣}$

اجابات التدريبات

تدريب (١): −٢

تدريب (٢): ٢

تدريب (٣): $\frac{\pi}{٢}$

تمارين على الدرس الخامس

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مدى الدالة د : د(θ) = جا٢ θ هو ....

(أ) [-٢ ، ٢]　(ب) { -٢ ، ٢ }　(جـ) { -١ ، ١ }　(د) [-١ ، ١]

(٢) مدى الدالة د : د(θ) = جتا $\frac{١}{٢}\theta$ هو ....

(أ) [$-\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$]　(ب) { $-\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ }　(جـ) ($-\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$)　(د) [-١ ، ١]

(٣) القيمة العظمى للدالة د : د(ع) = جتا ع هى ....

(أ) ١　(ب) ٣　(جـ) ٤　(د) $\frac{١}{٣}$

(٤) القيمة الصغرى للدالة د : د(م) = ٣ + جتا٢م هى ....

(أ) -٢　(ب) -٣　(جـ) ٢　(د) ٥

(٥) الدالة د : د(θ) = ٢جتا٣ θ دالة دورية ودورها = ...

(أ) $\frac{٢\pi}{٣}$　(ب) π　(جـ) $\frac{\pi}{٣}$　(د) $\frac{\pi}{٢}$

(٦) مدى الدالة د : د(θ) = ٥ - جتا٣ θ هو ....

(أ) [-٥ ، ٥]　(ب) [٤ ، ٦]　(جـ) [٣ ، ٥]　(د) [-١ ، ١]

(٧) مدى الدالة د : د(س) = $\frac{١}{٣}$ جاس هو ....

(أ) [$-\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$]　(ب)] $-\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$ [　(جـ) { $-\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$ }　(د) ($-\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$)

(٨) مدى الدالة د : د(θ) = جتا θ ، $\theta \in$ [٠ ، π] هو ....

(أ)] -١ ، ٠]　(ب) [٠ ، ١]　(جـ)] -١ ، ١]　(د)] $-\infty$ ، ∞ [

إجابات تمارين على الدرس الخامس

(١) [-١ ، ١]

(٢) [-١ ، ١]

(٣) ١

(٤) ٢

(٥) $\frac{٢\pi}{٣}$

(٦) [٤ ، ٦]

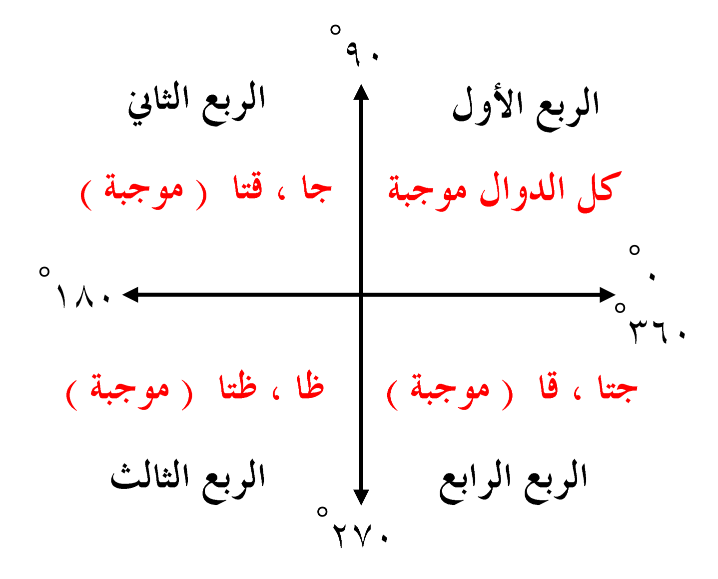
(٧) [$-\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$]

(٨)] -١ ، ١]

الدرس السادس: إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية

تمهيد : إذا كانت : ص = جاθ ⟵ فإذا علمت قيمة ص فإنه يمكن إيجاد قيمة θ

تذكر أن : إشارات الدوال المثلثية :



مثال محلول (١): أوجد θ التي تحقق : جا $\theta = \frac{١}{٢}$ حيث : $\theta \in$ [٠ ، ٢ π]

الحـــــــــــــــل

باستخدام الآلة الحاسبة : $= \text{shift} \ \sin \ \frac{1}{2}$

θ = ٣٠° أو θ = ١٥٠° (لأن : جا θ موجبة في الربع الأول والثانى)

تدريب (١): أوجد θ التي تحقق : جتا $\theta = \frac{١}{٢}$ حيث : $\theta \in$ [٠ ، ٢ π]

مثال محلول (٢): إذا كان : ظاθ = $\sqrt{٣}$ حيث : $\theta \in$ [٩٠° ، ٢٧٠°] فإن : θ = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٢٤٠° (جـ) ١٥٠° (د) ١٣٥°

الحـــــــــــــــل

باستخدام الآلة الحاسبة : $\text{shift} \ \tan \ \sqrt{3} \ =$

$\theta = ٦٠^\circ$ أو $\theta = ٢٤٠^\circ$ (لأن : ظا θ موجبة في الربع الأول والثالث)

الإجابة : $\theta = ٢٤٠^\circ$ لأن : $\theta \in [\,٩٠^\circ ، ٢٧٠^\circ\,]$

تدريب (٢): إذا كان : جتاθ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ حيث : $\theta \in]\,١٨٠^\circ ، ٣٦٠^\circ\,[$ فإن : θ = ...

(أ) ٣٠° (ب) ١٥٠° (جـ) ٢١٠° (د) ٣٣٠°

مثال محلول (٣):

إذا كان : قاθ = – ٢,١٣ حيث : $\theta \in]\,٠^\circ ، ٣٦٠^\circ\,[$ فإن : $\theta \in$ .... لأقرب درجة

(أ) $\{\,٦٢^\circ ، ٢٩٩^\circ\,\}$ (ب) $\{\,٦٠^\circ ، ٣٠٠^\circ\,\}$

(جـ) $\{\,١١٨^\circ ، ٢٩٨^\circ\,\}$ (د) $\{\,١١٨^\circ ، ٢٤٢^\circ\,\}$

الحـــــــــــــــل

قاθ = – ٢,١٣ ⟸ جتاθ = – ٠,٤٦٩٤٨

باستخدام الآلة الحاسبة : $\text{shift} \ \cos$ ٠,٤٦٩٤٨ =

فتكون قياس الزاوية الحادة : ٦٢°

$\theta = ١١٨^\circ$ أو $\theta = ٢٤٢^\circ$ (لأن : جتا θ سالبة في الربع الثانى والثالث)

تدريب (٣):

إذا كان : قتاθ = – ١,٠٦ حيث : $\theta \in]\,٠ ، ٢\pi\,[$ فإن : $\theta \in$ .... لأقرب درجة

(أ) $\{\,١٠٩^\circ ، ٢٨٩^\circ\,\}$ (ب) $\{\,٢٥١^\circ ، ٢٨٩^\circ\,\}$

(جـ) $\{\,٧١^\circ ، ٢٨٩^\circ\,\}$ (د) $\{\,٧١^\circ ، ١٠٩^\circ\,\}$

مثال محلول (٤): قياس أصغر زاوية موجبة تحقق : قا$^{-1}$(**٣,٢٤٥**) = ... لأقرب درجة

(أ) ٧٠° (ب) ٧١° (حـ) ٧٢° (ء) ٧٣°

الحـــــــــــــــل

باستخدام الآلة الحاسبة : $= \text{shift} \ \cos \left(\frac{١}{٣,٢٤٥} \right)$

θ = ٧٢°

تدريب (٤): قياس أكبر زاوية موجبة تحقق : قتا$^{-1}$(**١,٣٦**) = ... لأقرب درجة

(أ) ٤٧° (ب) ١٣٣° (حـ) ٢٢٧° (ء) ٣١٣°

مثال محلول (٥): باستخدام الشكل المقابل :

θ = ... لأقرب دقيقة

θ
٥ سم
٤ سم

(أ) **٥٣° ٨َ** (ب) **١٢٦° ٥٢َ**
(حـ) **٣٦° ٥٢َ** (ء) **٣٨° ٤٠َ**

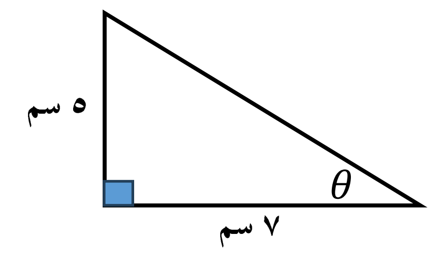
الحـــــــــــــــل

جا θ = $\frac{٤}{٥}$

θ = **٥٣° ٨َ**

تدريب (٥): باستخدام الشكل المقابل :

θ = ... لأقرب دقيقة



(أ) **٣٥° ٣٢َ** (ب) **٣٥° ٥َ**
(حـ) **٣٥° ٥٤َ** (ء) **٣٥° ٢٣َ**

اجابات التدريبات

تدريب (١): ٦٠° ، ٣٠٠°

تدريب (٢): ٣٣٠°

تدريب (٣): { ٢٥١° ، ٢٨٩° }

تدريب (٤): ١٣٣°

تدريب (٥): ٣٢ ′ ٣٥°

تمارين على الدرس السادس

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابة المعطاة :

(١) إذا كان : جاθ = ٠,١٣٦ فإن : θ ≃ .... حيث : θ زاوية منفرجة

(أ) ٤٩ ′ ٧° (ب) ٤٨ ′ ٧° (حـ) ١١ ′ ١٧٢° (ء) ١٨ ′ ١٧٢°

(٢) إذا كان : جتاθ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ فإن : θ = ...° حيث : θ ∋] ٠° ، ٩٠° [

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (حـ) ٦٠ (ء) ٧٥

(٣) قياس الزاوية الحادة الموجبة التي تحقق : قتا θ = $\sqrt{2}$ تساوى ....°

(أ) ١٥ (ب) ٣٠ (حـ) ٣٥ (ء) ٤٥

(٤) إذا كان : قتاθ = ٢,٤١٣٦ فإن : θ ≃ .... حيث : θ ∋] ٠° ، ٩٠° [

(أ) ٢٤,٤٧٦° (ب) ٢٢,٥٠٥° (حـ) ٦٥,٥٢٣° (ء) ٦٧,٤٩٥°

(٥) إذا كان : جاθ = − ٠,٨٧ فإن : θ ≃ .... حيث : θ ∋] ٩٠° ، ٢٧٠° [

(أ) ٦٠,٤٥٩° (ب) ٢٤٠,٤٥٩° (حـ) ٢٩٩,٥٤١° (ء) ٣٣٠,٤٩٥°

(٦) إذا كان : جتاθ = − $\frac{١}{٢}$ فإن : θ = ... ° حيث : θ قياس أصغر زاوية موجبة

(أ) ٦٠ (ب) − ٦٠ (حـ) ١٥٠ (ء) ١٢٠

(٧) باستخدام الشكل المقابل :

θ = ...

(أ) جا$^{-١}$ ($\frac{٤}{٣}$) (ب) ظا$^{-١}$ ($\frac{٤}{٣}$)

(حـ) ظا$^{-١}$ ($\frac{٣}{٤}$) (ء) جا$^{-١}$ ($\frac{٣}{٤}$)

٤ سم

٣ سم

θ

إجابات تمارين على الدرس السادس

(١) ١١ / ١٧٢°

(٢) ٣٠

(٣) ٤٥

(٤) ٢٤,٤٧٦°

(٥) ٢٤٠,٤٥٩°

(٦) ١٢٠

(٧) ظا$^{-١}$ ($\frac{٤}{٣}$)

تمارين على الوحدة الرابعة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : ظتا(٩٠° − θ) = ظتا٢θ حيث : $\theta \in$] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [فإن : جا٣θ = ...

(أ) صفر (ب) −١ (حـ) $\frac{١}{٢}$ (ء) ١

(٢) إذا كان : جاθ = $\frac{١}{٢}$ فإن قياس أصغر زاوية موجبة تحقق هذه المعادلة المثلثية = ...

(أ) ١٥٠° (ب) ٣٠° (حـ) ٦٠° (ء) ٣٣٠°

(٣) إذا دار الضلع النهائي للزاوية التي قياسها ١٥٠° في الوضع القياسى أربع دورات في اتجاه دوران عقارب الساعة فإن الضلع النهائي يكون في الربع ....

(أ) الأول (ب) الثانى (حـ) الثالث (ء) الرابع

(٤) جا(٩٠° − θ) × قاθ = ...

(أ) صفر (ب) −١ (حـ) ظاθ (ء) ١

(٥) عدد مرات تقاطع المنحنى ص = جا٣θ مع محور السينات في الفترة [٠ ، ٢π] = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (حـ) ٣ (ء) ١

(٦) إذا كان : قا٣θ = ٢ حيث θ قياس زاوية حادة موجبة فإن : θ = ...

(أ) ١٠° (ب) ١٥° (حـ) ٢٠° (ء) ٣٠°

(٧) محيط الدائرة المرسوم بها زاوية محيطية قياسها ١٢٠° وتقابل قوساً طوله ٤π سم = ... سم

(أ) ٢٤π (ب) ١٨π (حـ) ١٢π (ء) ٦π

(٨) جميع القياسات التالية تكافىء الزاوية التي قياسها ٧٥° في الوضع القياسى ماعدا ....

(أ) — ١٠٠٥° (ب) — ٦٤٥° (حـ) ٢٨٥° (ء) ٤٣٥°

(٩) الزاوية التي قياسها ٧٨٠° في الوضع القياسى تقع في الربع ....

(أ) الأول　　(ب) الثانى　　(حـ) الثالث　　(ء) الرابع

(١٠) الزاوية التي قياسها $\frac{٢٦\pi}{٣}$ في الوضع القياسى تقع في الربع ....

(أ) الأول　　(ب) الثانى　　(حـ) الثالث　　(ء) الرابع

(١١) الزاوية التي قياسها $\frac{-٧\pi}{٤}$ في الوضع القياسى تقع في الربع ....

(أ) الأول　　(ب) الثانى　　(حـ) الثالث　　(ء) الرابع

(١٢) قياس إحدى زوايا الشكل السداسى المنتظم بالقياس الدائرى = ...ء

(أ) $\frac{\pi}{٣}$　　(ب) $\frac{٢\pi}{٣}$　　(حـ) $\frac{٣\pi}{٤}$　　(ء) $\frac{٥\pi}{٦}$

(١٣) قياس إحدى زوايا الشكل الثمانى المنتظم بالقياس الدائرى = ...ء

(أ) $\frac{\pi}{٣}$　　(ب) $\frac{٢\pi}{٣}$　　(حـ) $\frac{٣\pi}{٤}$　　(ء) $\frac{٥\pi}{٦}$

(١٤) إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا شكل رباعى هي ٣ : ٤ : ٥ : ٦ فإن : القياس الدائرى لأصغر زواياه = ...ء

(أ) $\frac{\pi}{٣}$　　(ب) $\frac{\pi}{٦}$　　(حـ) $\frac{٢\pi}{٩}$　　(ء) $\frac{٤\pi}{٩}$

(١٥) إذا كانت : (س ، – س) نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية قياسها θ في الوضع القياسى مع دائرة الوحدة حيث س < ٠ فإن : ق ($\angle \theta$) = ...

(أ) ٣٣٠°　　(ب) ٣١٥°　　(حـ) ٣٠٠°　　(ء) ٢٢٥°

(١٦) أي من قياسات الزوايا الآتية يكون إشارة الظل وجيب التمام سالبتين ....

(أ) ٧٥٠°　　(ب) ٨٨٠°　　(حـ) ٩٥٠°　　(ء) ١٠٨٠°

(١٧) إذا كان : جا θ = $\frac{١}{٢}$ ، جتا θ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ فإن : ق ($\angle\ \theta$) = ...

(أ) ١٢٠° (ب) ١٥٠° (جـ) ٣٠٠° (د) ٢٤٠°

(١٨) أبسط صورة للمقدار : جتا ($١٨٠^\circ - \theta$) + جا ($٩٠^\circ + \theta$) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ جا θ (د) ٢ جتا θ

(١٩) إذا كانت θ قياس زاوية حادة موجبة وكان : ظا θ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ فإن : جتا ٤ θ = ...

(أ) $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{-١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٢٠) إذا كانت : $\theta \in$] ٩٠° ، ١٨٠° [وكانت : ظا θ = $-\frac{٤}{٣}$ فإن : قتا ($٩٠^\circ + \theta$) = ...

(أ) $\frac{-٥}{٣}$ (ب) $\frac{-٥}{٤}$ (جـ) $\frac{٥}{٣}$ (د) $\frac{٥}{٤}$

(٢١) إذا كان : جا θ = جتا β حيث : θ ، β قياسا زاويتان حادتان فإن : جا($\theta + \beta$) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) -١ (د) غير معرفة

(٢٢) في Δ أ ب جـ إذا كان : جا أ = جتا ب فإن : ظا جـ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $\sqrt{٣}$ (د) غير معرفة

(٢٣) إذا كان : أ ب جـ د شكل رباعي فإن : جا (أ + ب + جـ) = ...

(أ) – جا د (ب) جتا د (جـ) جتا (٩٠° + د) (د) – جتا د

(٢٤) في الشكل المقابل : ق ($\angle$ أ هـ د) = ق ($\angle$ ب)

فإن : جتا ب + جتا (جـ هـ د) = ...

(أ) صفر (ب) ١

(جـ) -١ (د) ٢

(٢٥) القياس الدائرى لزاوية مركزية تحصر قوساً طوله ٣سم في دائرة محيطها ٤ π سم = ... ء

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (حـ) ٥ (ء) ٦

(٢٦) القياس الستينى لزاوية مركزية تحصر قوساً طوله ٣ π سم في دائرة طول قطرها ١٢سم = ...

(أ) °٣٠ (ب) °٦٠ (حـ) °٩٠ (ء) °١٢٠

(٢٧) إذا كانت : جتا(°٩٠ + θ) = $\frac{-١}{٢}$ حيث : θ قياس أصغر زاوية موجبة في الوضع القياسى

فإن : θ = ...

(أ) °٣٠ (ب) °٦٠ (حـ) °١٢٠ (ء) °٢٤٠

(٢٨) إذا كان : جا ٤ θ = جتا ٥ θ حيث : θ قياس زاوية حادة موجبة فإن : ظا٣ θ = ...

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ (ب) ١ (حـ) $\sqrt{٣}$ (ء) غير معرفة

(٢٩) إذا كانت : د(س) = ٣جاس فإن مجموع القيمتين العظمى والصغرى للدالة = ...

(أ) صفر (ب) ٦ (حـ) ٣ (ء) ٢

(٣٠) مدى الدالة : د(س) = ٢جتا٣س هو ....

(أ) [-٢ ، ٢] (ب) [-٣ ، ٣] (حـ) [-٦ ، ٦] (ء) [١ ، ٥]

(٣١) إذا كانت الدالة د : د(س) = أجا٢س حيث أ > ٠ وكان مدى الدالة د هو [-٥ ، ٥]

فإن : أ = ...

(أ) ٧ (ب) ٥ (حـ) ٣ (ء) ٢

(٣٢) إذا كانت : د(س) = ٢جا٣س دالة دورية دورها تساوى ....

(أ) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) $\frac{٢\pi}{٣}$ (حـ) $\frac{٣\pi}{٢}$ (ء) π

(٣٣) مدى الدالة د : د(س) = ٥جا٢س + ٣ هو ....

(أ) [−٢ ، ٨]　　(ب) [−١ ، ٥]　　(حـ) [١ ، ٥]　　(ء) [٢ ، ٨]

أجب عن الأسئلة الآتية :

(٣٤) إذا كانت النقطة ب (−٥ك ، −١٢ك) هي نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسى قياسها θ حيث : ١٨٠° < θ < ٢٧٠° مع دائرة الوحدة فاوجد قيمة المقدار :

قتا(٩٠° − θ) جا(٩٠° + θ) + ١٢ظا(٢٧٠° + θ)

(٣٥) أوجد القياس الدائرى لزاوية مركزية تقابل قوسًا طوله ٣سم في دائرة مساحة سطحها ٣٦ π سم٢

(٣٦) أوجد الحل العام للمعادلة : ظا (θ + ٢٠°) = ظتا (٣θ + ٣٠°) ، ثم أوجد قيم θ حيث : θ ∈] ٠° ، ٩٠° [

(٣٧) مثلث قياس إحدى زواياه ٤٥° وقياس زاوية أخرى فيه $\frac{\pi}{٣}$ أوجد القياس الستينى والدائرى لقياس الزاوية الثالثة.

(٣٨) أوجد طول القوس المرسوم في دائرة طول نصف قطرها ٤سم ، ويحصر زاوية محيطية قياسها ٦٠°

(٣٩) بندول بسيط يتكون من كرة صغيرة وخيط طوله ٨٠ سم فإذا كانت الكرة تتحرك على قوس دائرى طوله ٤٣,٢ سم أوجد القياس الدائرى والستينى للزاوية التي يتذبذب خلالها البندول.

(٤٠) أوجد المسافة التي تقطعها نقطة على طرف عقرب الدقائق خلال ٢٠ دقيقة إذا كان طول هذا العقرب ١٥ سم.

إجابات تمارين على الوحدة الرابعة

(١) ١	(٤) ١	(٧) ١٢ π
(٢) ٣٠°	(٥) ٢	(٨) ٢٨٥°
(٣) الثانى	(٦) ٢٠°	(٩) الأول

(١٠) الثانى

(١١) الأول

(١٢) $\frac{٢\pi}{٣}$

(١٣) $\frac{٣\pi}{٤}$

(١٤) $\frac{\pi}{٣}$

(١٥) ٣١٥°

(١٦) ٨٨٠°

(١٧) ١٥٠°

(١٨) صفر

(١٩) $\frac{-١}{٢}$

(٢٠) $\frac{٥}{٣}$

(٢١) ١

(٢٢) غير معرفة

(٢٣) – جاء

(٢٤) صفر

(٢٥) $\frac{٣}{٢}$

(٢٦) ٩٠°

(٢٧) ٣٠°

(٢٨) $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

(٢٩) صفر

(٣٠) [–٢ ، ٢]

(٣١) ٥

(٣٢) $\frac{٢\pi}{٣}$

(٣٣) [–٢ ، ٨]

(٣٤) ٦

(٣٥) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{ء}$

(٣٦) ١٠° ، ٤٥°

(٣٧) ٧٥° ، $\left(\frac{٥\pi}{١٢}\right)^{ء}$

(٣٨) $\frac{٤\pi}{٣}$ سم

(٣٩) $\left(\frac{٢٧}{٥٠}\right)^{ء}$ ، $٣٠,٩^\circ$

(٤٠) ١٠ π سم

اختبار على الوحدة الرابعة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الزاوية التي قياسها ٧٨٠° تقع في الربع ....

(أ) الأول (ب) الثانى (حـ) الثالث (ء) الرابع

(٢) إذا كان : جا (٩٠° − س) = $\frac{١}{٢}$ حيث : س هي قياس أصغر زاوية موجبة فإن : س = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (حـ) ٦٠ (ء) ٩٠

(٣) طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ٣٠° في دائرة طول نصف قطرها = ٦ سم يساوى .... سم

(أ) ٢ π (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (حـ) π (ء) $\frac{\pi}{٢}$

(٤) إذا كان : جتاθ = ١ ، جاθ = صفر حيث : $\theta \in$] ٠ ، ٢ π [فإن : θ = ...°

(أ) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) π (حـ) صفر (ء) $\frac{\pi}{٤}$

(٥) في Δ أ ب حـ إذا كان : جا أ = جتا ب فإن : ق (∠ حـ) = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (حـ) ٦٠ (ء) ٩٠

(٦) إذا كانت س قياس زاوية حادة موجبة وكان : جا ٢س = جتا ٣س فإن : س = ...°

(أ) ١٨ (ب) ٣٠ (حـ) ٧٥ (ء) ٩٠

(٧) القيمة العظمى للدالة د : د (س) = ٢ جا ٥س هي ....

(أ) ٢ (ب) ٥ (حـ) ٧ (ء) ١٠

(٨) قياس أكبر زاوية سالبة تكافئ الزاوية التي قياسها ٦٩٠° يساوى ....°

(أ) − ١١٠° (ب) − ٧٠° (حـ) − ٥٠° (ء) − ٣٠°

(٩) القياس الدائرى للزاوية التي قياسها ١٢٠° هو ....

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (حـ) $\frac{٢\pi}{٣}$ (ء) $\frac{\pi}{٦}$

(١٠) إذا كان : θ قياس زاوية فى الوضع القياسى وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة

$\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$ فإن : ظاθ = ...

(أ) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (حـ) $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (ء) $-\sqrt{٣}$

(١١) إذا كان : قتا(٩٠° − θ) = قتا٢θ حيث : $\theta \in$] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [فإن : جتا٢θ = ...

(أ) صفر (ب) −١ (حـ) $\frac{١}{٢}$ (ء) ١

(١٢) مساحة الدائرة المرسوم بها زاوية محيطية قياسها ٦٠° وتقابل قوساً طوله ٤π سم = ... سم^{٢}

(أ) ٢٤π (ب) ١٨π (حـ) ١٢π (ء) ٣٦π

<u>أجب عن الأسئلة الآتية :</u>

(١٣) أوجد قيمة س التي تحقق : س جتا^{٢}٦٠° قتا^{٢}٤٥° = ظتا^{٢}٣٠° − ٢ جتا ٣٦٠°

(١٤) إذا كان θ قياس زاوية فى الوضع القياسى وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة

(− س ، ٢س) ، س > ٠ فاوجد قيمة : جاθ ، قاθ

(١٥) إذا كانت θ قياس زاوية فى الوضع القياسى حيث : ظتا θ = −١ ، قتا θ = $\sqrt{٢}$ فاوجد ق($\angle\theta$)

(١٦) إذا كانت θ هي قياس زاوية في الوضع القياسى وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة

$\left(-\frac{١}{٢} ، \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$ فاوجد قيمة المقدار : جا(١٨٠° − θ) قتا(٢٧٠° − θ) − ظتا(٩٠° + θ)

إجابات اختبار على الوحدة الرابعة

(١) الأول

(٢) ٦٠

(٣) π

(٤) صفر

(٥) ٩٠

(٦) ١٨

(٧) ٢

(٨) $-$ ٣٠°

(٩) $\frac{٢\pi}{٣}$

(١٠) $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$

(١١) $\frac{١}{٢}$

(١٢) ٣٦π

(١٣) ٨

(١٤) $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ ، $-\sqrt{٥}$

(١٥) ١٣٥°

(١٦) صفر